Pierre-Olivier
Maîtrise en mathématiques et informatique appliquées
Séminaires, MAP6012

GÉOMÉTRIE FRACTALE ET AU-DELÀ DE LA DIMENSION

Travail présenté à
M. Fathallad Nouboud

Université du Québec à Trois-Rivières
15 décembre 2015

Rapport sur la présentation

Depuis l'apparition de l'informatique, les mathématiques ont pris un nouveau tournant. Ce nouvel outil a permis de réaliser des calculs qui étaient autrefois impossibles à entreprendre. Par exemple, la conjecture des quatre couleurs a été résolue, pour la première fois, à l'aide d'un ordinateur. En ce qui nous concerne, la géométrie fractale est un récent domaine des mathématiques qui a profité de l'éclosion de l'informatique. En effet, plusieurs images de fractales ne sont obtenues qu'à l'aide de programmes informatiques. Autrement dit, les concepts abstraits de la géométrie fractale sont rendus plus concrets grâce à l'informatique.

Dans ce rapport, nous allons brièvement décrire le contenu de la présentation *Géométrie fractale et au-delà de la dimension*. Pour ce faire, nous présentons un aperçu historique de la géométrie fractale, de la période grecque jusqu'à aujourd'hui. Ensuite, nous présentons d'une manière succincte la théorie des ensembles multibrots. Pour terminer, nous énonçons les objectifs à atteindre à la fin de la maîtrise.

1 Aperçue historique de la géométrie fractale

La géométrie fractale remonte à une époque lointaine. À tout de moins, les traces des premiers concepts reliés aux fractales, selon la terminologie d'aujourd'hui, remonte à la période grecque. En effet, l'artiste Apollonius de Perge (262-190 av. J.C.) construit une figure issue d'un processus itératif : on part d'un triangle curviligne et on y ajoute à l'intérieur un disque tangent à ses côtés. On ré-applique la procédure sur les nouveaux triangles curvilignes obtenus et on obtient la *baderne d'Apollonius*. Ensuite, le mathématicien Héron d'Alexandrie ($\approx$ 1 ap. J.C) construit une méthode pour trouver la racine carrée d'un nombre réel positif.

Aux 19^e et 20^e siècles, une crise émerge dans la communauté des mathématiciens, particulièrement dans le domaine de l'analyse mathématique. Cette crise débute avec une sommité dans le domaine : Karl Weierstrass (1815-1897). Ce dernier montre qu'il existe une courbe continue qui n'est dérivable nulle part. La courbe construite par Weierstrass entre dans le cadre de figures fractales définies par Benoît Mandelbrot à la fin du 20^e siècle. Puis, Georg Cantor (1845-1918) ébranle les mathématiciens de son époque en construisant son célèbre ensemble *triadique*. Cet ensemble a la propriété d'avoir un intérieur vide et d'être non dénombrable. L'ensemble triadique de Cantor est un autre exemple d'une fractale. En renfort aux deux derniers mathématiciens, Giusseppe Peano (1858-1932) et David Hilbert (1862-1943) construisent une courbe (indépendamment de l'un et de l'autre) qui remplisse un carré. Autrement dit, ces deux derniers mathématiciens ont montré que même la notion de dimension, un concept intuitif à la créature humaine, est en fait beaucoup plus complexe qu'on peut le penser. Enfin, Waclaw Sierpinski (1882-1969), un contemporain de Peano et Hilbert, construit un ensemble qui est l'exemple typique d'une fractale. On part d'un triangle équilatéral d'intérieur plein, on le subdivise en quatre triangles congrus et équilatéraux. On retranche le triangle du milieu. On répète la procédure sur les nouveaux triangles pleins obtenus. À la fin du processus, on obtient le célèbre *triangle de Sieipinski*[1]. Cependant, les analystes mathématiciens ne savent plus où mettre les pieds et ils sont abasourdis par les « monstres » construits par leurs collègues mathématiciens de cette époque.

Sans que le mot *fractale* ne soit utilisé, deux mathématiciens s'attaquèrent à la formalisation d'une branche des mathématiques maintenant appelée *systèmes dynamiques* (qui englobe et permet de construit des objets fractals). Il s'agit de Pierre Fatou (1878-1929) et de Gaston Julia (1893-1978). Ces deux mathématiciens développent une théorie générale des systèmes dynamiques générés par l'itération d'une fonction rationnelle de la forme

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

où $p(z)$ et $q(z)$ sont des polynômes d'une variable complexe. Cependant, leur théorie est oubliée puisque les objets qu'ils construisent n'intéressent pas les mathématiciens. Or, dès l'avènement de l'informatique, leurs travaux prennent une plus grande importance. Précisément, la tâche revient au mathématicien Benoît Mandelbrot (1924-2010) de réviser les travaux de Fatou et Julia. Il construit, dans les laboratoires de la compagnie IBM, un programme qui permet de visualiser les ensembles élaborés par les deux derniers mathématiciens. Les images qu'il obtint sont fascinantes. Il étudia aussi les objets construits par Peano, Weierstrass, Hilbert, Sierpinsky, Appolonius et bien d'autres qui ne sont pas cités ici. Il remarqua quatre propriétés qui les caractérisent :

1. les parties ressemblent au tout, ce qu'il appela l'*autosimilarité* ;
2. la présence de détails à toutes les échelles, c'est-à-dire, on peut agrandir, théoriquement, une région de l'objet fractale infiniment ;
3. l'irrégularité de l'objet, c'est-à-dire que l'objet présente des formes complexes et abruptes ;
4. la dimension de l'objet est inférieure à sa dimension topologique.

C'est ainsi que Mandelbrot développe une nouvelle branche de la géométrie, la géométrie des formes irrégulières, typiquement la *géométrie fractale*. Cependant, les images générées sont principalement en deux dimensions.

Les mathématiciens s'intéressent alors à générer des fractales en trois dimensions. Alan Norton (19 ? ?-19 ? ?) fut l'un des premiers à utiliser les quaternions afin de générer des fractales en 4D. Il fait ensuite des coupes 3D de l'ensemble afin de le visualiser sur un ordinateur.

Bref, la présence de la géométrie fractale remonte à la Grèce antique, sans toute fois avoir un soucis de formalisation. Cependant, une crise des concepts en analyse mathématiques fait éclore un besoin de formalisation des objets construits à cette époque. Cette formalisation est effectuée par deux mathématiciens et complétée par Benoît Mandelbrot.

1. Cet object est souvent utilisé en informatique pour mettre en application la récursivité. En effet, une solution élégante pour générer cet image fait appelle à la récursivité.

2 Théorie des ensembles multibrots

Dans le domaine de la géométrie fractale, une fractale est particulièrement connue. Il s'agit de l'ensemble de Mandelbrot. Cet ensemble puise sa source dans la théorie développée par Fatou et Julia, mais c'est Mandelbrot, le premier, qui en fournit une représentation visuelle. La définition de l'ensemble de Mandelbrot est la suivante :

$$\mathcal{M}_1^2 := \left\{ c \in \mathbb{C} \,:\, \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}$$

où $Q_{2,c}(z) = z^2 + c$ avec z, c des nombres complexes et

$$Q_{2,c}^m = \underbrace{Q_{2,c} \circ Q_{2,c} \circ \cdots \circ Q_{2,c}}_{m \text{ fois}}$$

représente les itérés successives [2] de la fonction $Q_{2,c}(z)$.

2.1 Les ensembles multibrots en 2D

Ce qui nous intéresse est l'étude de l'ensemble de Mandelbrot généralisé, appelée dans la littérature *Multibrots*, aux polynômes

$$Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$$

où p est un entier plus grand ou égal à 2. Ces ensembles ont été étudiés expérimentalement dans les années 80 et 90. Puis, des études sérieuses sur les propriétés topologiques de ces ensembles sont effectuées par de nombreux auteurs.

2.2 Passage aux dimensions supérieures à deux

D'autres part, on s'intéresse aussi à généraliser l'ensemble de Mandelbrot à deux nouvelles structures de nombres : les nombres bicomplexes et tricomplexes. Autrement dit, les nombres η et c peuvent être des nombres complexes, bicomplexes ou tricomplexes.

L'utilisation d'une nouvelle structure algébrique telle que les nombres bicomplexes a été initiée par Dominic Rochon. En 2000, Rochon publie un article sur l'application des nombres bicomplexes à la génération tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot. Ce qu'il remarque est que l'ensemble de Mandelbrot ainsi générer a une structure plus riche que l'ensemble de Mandelbrot obtenu à partir des quaternions. Autrement dit, il est plus intéressant d'étudier l'ensemble de Mandelbrot à l'aide des nombres bicomplexes puisqu'on y retrouve plusieurs classes de fractales, qui ne sont pas

2. L'opération $\circ$ est la composition de fonctions, c'est-à-dire $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ en autant que le domaine de f contient l'image de g.

triviales. L'ensemble des nombres bicomplexes est défini par

$$\mathbb{M}(2) := \{z_1 + z_2\mathbf{i_2} \, : \, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

où $z_1 = x_1 + x_2\mathbf{i_1}$, $z_2 = x_3 + x_4\mathbf{i_1}$ et $\mathbf{i_2^2} = -1$. L'ensemble des nombres bicomplexes peut alors se réécrire comme

$$\mathbb{M}(2) = \{x_1 + x_2\mathbf{i_1} + x_3\mathbf{i_2} + x_4\mathbf{j_1} \, : \, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

où $\mathbf{i_1^2} = -1$ et $\mathbf{j_1^2} = 1$. Donc, un nombre bicomplexe s'identifie à un couple de nombres complexes ou à un quadruplet de nombres réels.

Puis, en 2009, Dominic Rochon et un de ses étudiants de maîtrise, Vincent Garrant-Pelletier, ont généralisé les résultats du l'article précédent des années 2000 à l'espace des nombres multicomplexes et ils se sont restreints aux nombres tricomplexes afin d'étudier plus particulièrement l'ensemble de Mandelbrot. L'ensemble des nombres tricomplexes est défini de la façon suivante :

$$\mathbb{M}(3) := \{\xi_1 + \xi_2\mathbf{i_3} \, : \, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{M}(2)\}$$

où $\mathbf{i_3^2} = -1$. En écrivant les nombres bicomplexes ξ_1 et ξ_2 en termes de leurs composantes complexes, on obtient une autre façon d'écrire l'ensemble des nombres tricomplexes :

$$\mathbb{M}(3) := \{z_1 + z_2\mathbf{i_2} + z_3\mathbf{i_3} + z_4\mathbf{j_3} \, : \, z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}\}$$

avec $\mathbf{j_3^2} = -1$. Finalement, en écrivant chaque nombre complexe z_i ($i = 1$, 2, 3 et 4) en termes de ses composantes réelles, on obtient une troisième manière d'écrire l'ensemble des nombres tricomplexes :

$$\mathbb{M}(3) := \{x_1 + x_2\mathbf{i_1} + x_3\mathbf{i_2} + x_4\mathbf{i_3} + x_5\mathbf{i_4} + x_6\mathbf{j_1} + x_7\mathbf{j_2} + x_8\mathbf{j_3} \, : \, x_i \in \mathbb{R} \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 8\}$$

où $\mathbf{i_4^2} = -1$ et $\mathbf{j_2^2} = 1$.

Enfin, en 2013, deux chercheurs chinois ont étendu l'idée de Dominic Rochon aux ensembles multibrots. Ils ont défini les ensembles multibrots en utilisant les nombres bicomplexes. Ils ont démontré quelques propriétés topologiques de ces ensembles.

2.3 Buts de la maîtrise

Le sujet de la maîtrise portera sur les ensembles multibrots. Ces ensembles seront étudiés en utilisant les nombres complexes, bicomplexes et tricomplexes. Précisément, on définit un Multibrot comme l'ensemble

$$\mathcal{M}_i^p := \left\{ c \in \mathbb{M}(i) \,:\, \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}$$

où p est un entier plus grand ou égal à 2 et $\mathbb{M}(i)$ est l'ensemble de nombres utilisé ($i = 1$ correspond à ensemble des nombres complexes, $i = 2$ correspond à l'ensemble des nombres bicomplexes et $i = 3$ correspond à l'ensemble des nombres tricomplexes). On cherche à comprendre la dynamique de ces fractales, à échantillonner les propriétés topologiques de cet ensemble, à écrire un programme informatique afin de générer ces ensembles et à comparer les différentes versions des ensembles multibrots entre elles et avec l'ensemble de Mandelbrot classique. Pour réaliser ce projet, un programme informatique est en cours de construction. Il permettra de générer les différentes versions des ensembles multibrots : bidimensionnels et tridimensionnels.

3 Perspectives et conclusion

Désormais, la géométrie fractale intéresse un large spectre de personnes : du spécialiste jusqu'aux inconnus. On peut le constater en inscrivant dans *GOOGLE* l'expression *géométrie fractale*. On retrouva des milliers de site traitant de la géométrie fractale et de nombreuses images captivantes. Depuis Benoît Mandelbrot, la géométrie fractale a aussi capté l'attention des chercheurs en médecine, en physique, en géologie, etc. Avec ma maîtrise, je veux formaliser au goût du jour la théorie des nombres tricomplexes et celle des ensembles multibrots. Si cela est possible, je voudrais continuer au doctorat afin d'approfondir le sujet avec des notions plus avancées en analyses classique et fonctionnelle. Un aspect intéressant de ma maîtrise est un lien avec l'informatique. Je voudrais aussi avoir, à la fin de ma maîtrise, un programme fonctionnel et malléable afin de générer des fractales en 3D.

La fertilité de la géométrie fractale est plus en plus acceptée. Elle est désormais utilisée dans la vie de tout les jour. Elle se retrouve partout et elle capture des informations sur notre monde qui ne nous sont pas accessibles directement. Elle est au-delà de notre perception sensorielle, au-delà de notre dimension !

Bibliographie

[1] Baley Price, G. : An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions. In : *Monographs and textbooks on pure and applied mathematics*, Marcel Dekker INC., New York (1991)

[2] M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B.B Mandelbrot et al. : The Science of Fractal Images. Springer-Verlag (1988)

[3] Douady, A., Hubbard, J. H. : Iteration des polynômes quadratiques complexes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **294**, 123-126 (1982)

[4] Mandelbrot, B. : The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Co., États-Unis (1982)

[5] Barnsley, M. F. : Fractals Everywhere. Dover Ed. (2012)

[6] Garant-Pelletier, V. : Ensembles de Mandelbrot et de Julia classiques, généralisés aux espaces multicomplexes et théorème de Fatou-Julia généralisé. Master Thesis, UQTR (2011)

[7] Garant-Pelletier, V., Rochon, D. : On a Generalized Fatou-Julia Theorem in Multicomplex spaces. *Fractals* **17**(3), 241-255 (2009)

[8] Gujar, U. G., Bhavsar V. C. : Fractals from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in The Complex c-Plane. *Computer Graph.* **15**(3), 441-449 (1991)

[9] Lau, E., Schleicher, D. : Symmetries of Fractals Revisited. *Math. Intelligencer.* **15**(1), 441-449 (1991)

[10] Matteau, C. : La méthode d'itération inverse pour les ensembles de Julia du plan et de l'espace tridimensionel. Maîtrise, UQTR (2014)

[11] Metzler, W. : The “mystery" of the quadratic Mandelbrot set. *Am. J. Phys.*. **62**(9), 813-814 (1994)

[13] Norton, A. : Generation and Display of Geometric Fractals in 3-D. *Comput. Graph.* **16**(3), 61-67 (1992)

[14] Papathomas, T. V., Julesz, B. : Animation with Fractals From Variations on The Mandelbrot Set. *Visual Comput.* **3**, 23-26 (1987)

[15] Rochon, D. : Dynamique bicomplexe et fractales 3D Dynamique complexe. Département de mathématiques et d'informatique, notes de cours, UQTR (2015)

[16] Rochon, D. : A Generalized Mandelbrot Set for Bicomplex Numbers. *Fractals.* **8**(4), 355-368 (2000)

[17] Rochon, D. : On a Generalized Fatou-Julia Theorem. *Fractals*. **11**(3), 213-219 (2003)

[18] Rochon, D., Shapiro, M. : On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Anal. Univ. Oradea*, fasc. math. **11**, 71-110 (2009)

[20] Senn, P. : The Mandelbrot Set for Binary Numbers. *Am. J. Phys.* **58**(10), 1018 (1990)

[21] Shapiro, M. , Struppa, D. C. , Vajiac, A., Vajiac M. B. : Hyperbolic Numbers and their Functions. *Anal. Univ. Oradea* **XIX**(1), 265-283 (2012)

[22] Sheng, X., Spurr, M. J. : Symmetries of Fractals. *Math. Intell.*. **18**(1), 35-42 (1996)

[23] Sobczyk, G. : The Hyperbolic Number Plane. *College Math. J.* **26**(4), 268-280 (1995)

[24] Vajiac, A., Vajiac, M. B. : Multicomplex Hyperfunctions. *Complex Var. and Elliptic Eqn.* **57**, 751-762 (2012)

[25] Wang, X.-y., Song W.-J. : The Genralized M-J Sets for Bicomplex Numbers. *Nonlinear Dyn.* **72**, 17-26 (2013)

[26] Parisé P.-O. et Rochon D. : A Study of The Dynamics of the Tricomplex Polynomial $\eta^p + c$. *Non Linear Dynam.* **82**(1), 157-171 (2015)