Problème de Liouville

Pierre-Olivier Parisé *

Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Trois-Rivières
C.P. 500 Trois-Rivières, Québec
Canada, G9A 5H7

Énoncé du problème

Prenez un nombre et trouvez son nombre de diviseurs positifs. Trouvez le nombre de diviseurs de chacun de ses diviseurs. Additionnez les nombres résultants et élevez la réponse au carré. Comparez-la à la somme des cubes des nombres de diviseurs des diviseurs originaux.

Q.1 Que remarquez-vous ?

Q.2 Quelle est l'identité que vous obtenez ?

Q.3 Pouvez-vous démontrer cette identité ? Si oui, faites-le. Si non, cherchez une euristique qui vous met sur le chemin d'une preuve.

Source : J. Masson. (1994) *L'esprit mathématique*, Éd. française Modulo (Québec), 178 pages.

Ce problème a été l'un que j'ai pris pour le cours *résolution de problèmes* à la session d'automne 2014 du baccalauréat en mathématiques et informatique. C'est l'un des problèmes dont je suis le plus fier d'avoir résolu ! Tous ce que vous voyez dans ce document est le fruit de mon travail.

N'oubliez jamais, les mathématiques, ça devient rigoureux quand tu rassembles tes idées ensembles. Le processus de recherche se fait dans un chaos ordonné et c'est à ce moment que le processus de création s'effectue. Il ne faut pas être gêné de laisser aller son imagination... même en mathématiques !(! ! !).

Exemples

Si $n = 6$, alors les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. On a alors

$$S_2 = \left(\sum_{d|n} \sigma(d) \right)^2 = (1 + 2 + 2 + 4)^2 = 81.$$

Si $n = 12$, alors les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3 4, 6 et 12. On a dans ce cas

$$S_3 = \sum_{d|n} (\sigma(d))^3 = 1 + 8 + 8 + 27 + 64 + 216 = 324.$$

Biensûr, pour remarquer quelque chose, il faut calculer les sommes S_2 et S_3 pour un même entier n. J'ai pris deux entiers différents afin de ne pas vous voler le « punch » .

*E-mail : Pierre-Olivier.Parise@uqtr.ca

Notations

Voici une série de notations utilisées pendant tout le développement qui va suivre :

1. n est un entier positif
2. les lettres p et q sont, à moins d'indication contraire, réservées aux nombres premiers
3. $d|n$ signifie que d divise n, *i.e.* il existe un entier k tel que $kd = n$
4. $\sigma(m)$ représente le nombre de diviseurs d'un entier m
5. S_2, la somme du nombre de diviseurs des diviseurs de n portée au carré, *i.e.*

$$S_2 := \left(\sum_{d|n} \sigma(d)\right)^2$$

6. S_3, la somme des cubes du nombre de diviseurs des diviseurs de n, *i.e.*

$$S_3 := \sum_{d|n} (\sigma(d))^3 .$$

Outils pertinents

Afin de répondre à la question, le théorème de factorisation première pour les nombres entiers positifs est essentiel.

Theorem 1. *Soit n un entier positif ($n = 1, 2, 3$, etc.). Alors, n peut s'exprimer de* ***manière unique*** *sous un produit de nombres premiers élevés à certaines puissances, i.e.*

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$$

où chaque r_i est un entier positif et chaque p_i est un nombre premier.

Rappelons qu'un nombre premier est un entier qui n'est divisible que par 1 et lui-même.

Nous aurons aussi besoin de quatre identités concernant la sommes d'entiers consécutifs.

Lemma 1. *Soit $r_1, r_2, \ldots, r_m$ des nombres entiers positifs. Alors,*

$$\sum_{a_1=0}^{r_1} \sum_{a_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{a_m=0}^{r_m} (a_1 a_2 \cdots a_m) = \left(\sum_{a_1=0}^{r_1} a_1\right) \left(\sum_{a_2=0}^{r_2} a_2\right) \cdots \left(\sum_{a_m=0}^{r_m} a_m\right), \tag{1}$$

$$\sum_{a_1=0}^{r_1} \sum_{a_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{a_m=0}^{r_m} (a_1 a_2 \cdots a_m)^3 = \left(\sum_{a_1=0}^{r_1} a_1^3\right) \left(\sum_{a_2=0}^{r_2} a_2^3\right) \cdots \left(\sum_{a_m=0}^{r_m} a_m^3\right), \tag{2}$$

ainsi que

$$\sum_{i=1}^{m} i^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{i=0}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{3}$$

Enfin, il faut connaître la formule suivante pour le nombre de diviseurs d'un entier positif n.

Lemma 2. *Soit n un entier positif sous sa représentation $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$. Alors,*

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}) = \sum_{i=1}^{m} (r_i + 1).$$

On donne la preuve de cette identité à l'aide d'un argument combinatoire.

Démonstration. Il suffit de remarquer que tous les diviseurs d de l'entier n sont de la forme $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdot p_m^{t_m}$ où $0 \le t_i \le r_i$. Ainsi, on doit choisir une première puissance t_1 parmi les puissance $\{0, 1, 2, \ldots, r_1\}$, puis une deuxième puissance t_2 parmi les puissances $\{0, 1, 2, \ldots, r_2\}$ et ainsi de suite jusqu'à la dernière puissance t_m. Par le principe de multiplication, il s'en suit que le nombre total de diviseurs est

$$(r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_m + 1) = \sigma(n).$$

□

Solution

La solution qui est présentée ci-après est basée sur plusieurs remarques que j'ai faites. Cependant, il y a un fait que je me suis aperçu et qui m'a débloqué :

> *J'ai pensé à tester sur un nombre premier. J'ai alors montré l'égalité $S_2 = S_3$ dans ce cas, qui était triviale. Par la suite, j'ai testé sur une puissance d'un nombre premier, c'est-à-dire un entier de la forme $n = p^r$ où p est un nombre premier et r est un entier positif. Dans ce cas, ma propre personne a trouvé une preuve. Puis, il m'est venu à l'esprit la décomposition en facteurs premiers de tout entier positif n. C'est là que tout s'est enchaîné. Je me suis aperçu d'une propriété fondamentale de la fonction σ donnant le nombre de diviseurs d'un entier positif et des formules d'addition d'entiers consécutifs. Ces dernières propriétés m'ont mené droit au but : $S_2 = S_3$*

La dernière citation est le résumé du résumé que j'ai fournit dans ma solution pour le cours. Vous aurez remarquer que la réponse à la question 1 et 2 est l'identité suivante :

$$S_2 = S_3$$

soit

> *Le carré de la somme du nombre de diviseurs de chaque diviseur de n = la somme des cubes du nombre de diviseurs de chaque diviseur de n.*

Le restant du document est dédié à répondre à la troisième question (la première partie).

La stratégie repose sur le fait que la fonction σ donnant le nombre de diviseurs d'un entier n est multiplicative.

Definition 1. *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un fonction. f est dite multiplicative si, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Lemma 3. *La fonction $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est multiplicative.*

Démonstration. Regardons ce qui se passe lorsque la fonction est appliquée sur la puissance d'un nombre premier, c'est-à-dire de la forme p^r où p est un nombre premier et r une puissance entière plus grande que 1. D'après le lemme 2, on a

$$\sigma(p^r) = r + 1.$$

En fait, comme tout nombre entier positif se représente en un produit de puissances de nombres premiers, il suffit de voir comment se comporte la fonction sur un produit de puissances de nombres premiers, *i.e.* est-ce que

$$\sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}) = \sigma(p_1^{r_1})\sigma(p_2^{r_2}) \cdots \sigma(p_m^{r_m})\,?$$

Donc, on a, en utilisant le lemme 2,

$$\sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}) = \prod_{i=1}^{m}(r_i + 1) = \prod_{i=1}^{m} \sigma(p_i^{r_i}).$$

Ceci termine la démonstration. □

Enfin, pour les sommes S_2 et S_3, nous avons l'identité suivante, qui démontre ce qu'on voulait et répond à la question.

Theorem 2. *Soit n un entier positif représenté par $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$. Alors,*

$$S_2 = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{(r_i + 1)(r_i + 2)}{2^m} \right)^2 = S_3.$$

Démonstration. Calculons d'abord la somme S_2. Chaque diviseur est de la forme $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}$ où $0 \leq t_i \leq r_i$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} S_2 = \left(\sum_{d|n} \sigma(d) \right)^2 &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} \ldots \sum_{t_m=0}^{r_m} \sigma(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{r_m}) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} \ldots \sum_{t_m=0}^{r_m} (t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_m + 1) \right)^2 \end{aligned}$$

d'après les lemmes 3 et 2. En utilisant les équations (1) et (3) du lemme 1 respectivement, on trouve que

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} \ldots \sum_{t_m=0}^{r_m} (t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_m + 1) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1} (t_1 + 1) \right)^2 \left(\sum_{t_2=0}^{r_2} (t_2 + 1) \right)^2 \cdots \left(\sum_{t_m=0}^{r_m} (t_m + 1) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1+1} t_1 \right)^2 \left(\sum_{t_2=0}^{r_2+1} t_2 \right)^2 \cdots \left(\sum_{t_m=0}^{r_m+1} t_m \right)^2 \\ &= \left(\frac{(r_1 + 1)(r_1 + 2)}{2} \right)^2 \left(\frac{(r_2 + 1)(r_2 + 2)}{2} \right)^2 \cdots \left(\frac{(r_m + 1)(r_m + 2)}{2} \right)^2 \\ &= \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{(r_i + 1)(r_i + 2)}{2^m} \right)^2. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la somme S_3. On a

$$\begin{aligned}S_3 = \sum_{d|n}(\sigma(d))^3 &= \sum_{t_1=0}^{r_1}\sum_{t_2=0}^{r_2}\dots\sum_{t_m=0}^{r_m}(\sigma(p_1^{t_1}p_2^{r_2}\cdots p_m^{r_m})^3 \\ &= \sum_{t_1=0}^{r_1}\sum_{t_2=0}^{r_2}\dots\sum_{t_m=0}^{r_m}((t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_m+1))^3\end{aligned}$$

d'après la propriété de multiplicité de σ et du lemme 2. En utilisant les équations (2) et (3) du lemme 1, on trouve que

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{t_1=0}^{r_1}\sum_{t_2=0}^{r_2}\dots\sum_{t_m=0}^{r_m}((t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_m+1))^3 \\ &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1}(t_1+1)^3\right)\left(\sum_{t_2=0}^{r_2}(t_2+1)^3\right)\cdots\left(\sum_{t_m=0}^{r_m}(t_m+1)^3\right) \\ &= \left(\sum_{t_1=0}^{r_1+1}t_1^3\right)\left(\sum_{t_2=0}^{r_2+1}t_2^3\right)\cdots\left(\sum_{t_m=0}^{r_m+1}t_m^3\right) \\ &= \left(\frac{(r_1+1)(r_1+2)}{2}\right)^2\left(\frac{(r_2+1)(r_2+2)}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{(r_m+1)(r_m+2)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{(r_i+1)(r_i+2)}{2^m}\right)^2.\end{aligned}$$

□