Y a-t-il plus complexe que les nombres complexes

Pierre-Olivier Parisé*
Midis conférences de l'Université Laval

17 février 2017

Résumé

Avez-vous entendu parler des nombres complexes ? Ces nombres sortis tout droit de l'imaginaire des mathématiciens et sujets à des règles obscures ! Parmi ces règles, il y a celle annonçant l'existence d'un nombre $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{i^2} = -1$. Cette règle, qui a énervée de nombreux mathématiciens et enthousiasmée bien d'autres, permet de régler plusieurs problèmes...

Dans cette exposé, notre but ne sera pas d'expliquer pourquoi $\mathbf{i^2} = -1$, mais plutôt d'utiliser cette règle afin de construire de nouveaux nombres dénommés *nombres multicomplexes*. Un fois la définition de ces nombres digérés, nous explorerons leur structure algébrique après avoir défini des opérations appropriées. Enfin, nous verrons une application de ces nombres en systèmes dynamiques.

Table des matières

*Site personnel : www.mathopo.com

1 Mise en contexte

1.1 Histoire

Les nombres complexes :

* Utiliser afin de résoudre les équations cubiques par Cardano ;
* Massivement utilisés par Euler et Gauss ;
* Gauss a démontré que toutes équations polynômiales de degré $n \geq 1$ a exactement n solutions dans les complexes ;
* La physique quangique, dont les travaux de Schrödinger, utilise sans permission les nombres complexes et la théorie des opérateurs.

1.2 Nombres complexes

Définition 1.1. Un nombre complexe z est composé de deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ et d'une entité $\mathbf{i_1}$ telle que

$$z = a + b\mathbf{i_1}$$

où $\mathbf{i_1}^2 = -1$.

La règle $\mathbf{i_1}^2 = -1$ reviendra plus tard. Elle sera au coeur de la définition des nombres multicomplexes.

Définition 1.2. Soit $z = a + b\mathbf{i_1}$ et $w = c + d\mathbf{i_1}$, alors

- $z + w := (a + c) + (b + d)\mathbf{i_1}$;
- $z \cdot w := (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i_1}$;
- $\overline{z} := a - b\mathbf{i_1}$;
- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = z\overline{z}$.

$(\mathbb{M}(1), +, \cdot)$ forme un corps commutatif.

Questions :

? Pouvons-nous généraliser les nombres complexes ?

? Sur cette généralisation, pouvons-nous garder une structure similaire à celle des complexes ?

La réponse est « oui » en utilisant la règle « $\mathbf{i_1}^2 = -1$ ».

1.3 Exercices

1. Si z satisfait l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, alors montrer (sans calculer z explicitement) que $z^3 = 1$.
2. Vérifier l'identité suivante :

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{M}(1).$$

3. Si $|a| \neq 1$ et $|b| = 1$ où $a, b \in \mathbb{M}(1)$, alors montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1.$$

2 Nombres multicomplexes

2.1 Histoire

* J. Cockle (1848) introduit les nombres tessarines (une algèbre de matrices). La présence de diviseurs de zéros le pousse à abandonner cette structure.
* Corrano Segre (1892) introduit à son tour les nombres bicomplexes. Il y remarque l'existence d'éléments idempotents se révélant des objets d'une importance capitale pour cette structure.
* G. B. Price (1991) a écrit un livre sur les nombres multicomplexes (voir [5]). Son ouvrage est considéré comme l'oeuvre fondamentale de cette théorie.

2.2 Construction des nombres multicomplexes

On définit $\mathbb{M}(0) := \mathbb{R}$ et $\mathbb{M}(1) := \{a + b\mathbf{i_1} \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ \mathbf{i_1}^2 = -1\}$.

Définition 2.1. — Un nombre multicomplexe d'ordre 0 est l'ensemble $\mathbb{R}$, $\mathbb{M}(0) := \mathbb{R}$.

— Un nombre multicomplexe d'ordre $n \geq 1$ η est de la forme

$$\eta := \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i_n}$$

où ζ_1 et ζ_2 sont des nombre multicomplexes d'ordre $n-1$ et $\mathbf{i_n}^2 = -1$.

Remarque 1. On observe que les nombres multicomplexes sont définis de manière récursive. ▲

Pour ne pas s'« enfarger » dans les notations fastidieuses de la théorie générale des nombres multicomplexes, on va étudier un cas particulier, l'**espace des nombres bicomplexes** $\mathbb{M}(2)$.

L'idée générale de construction est conservée en se concentrant sur les nombres bicomplexes.

3 Nombres bicomplexes

3.1 Définitions de base

Définition 3.1. Un nombre bicomplexe w est définie à partir de deux nombres complexes $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(1)$ et d'une nouvelle unité imaginaire $\mathbf{i_2}$ tels que

$$w := w_1 + w_2 \mathbf{i_2}$$

où $\mathbf{i_2}^2 = -1$.

Comme w_1 et w_2 sont des nombres complexes avec l'unité $\mathbf{i_1}$, on peut les écrire comme ceci

$$w_1 = a + b\mathbf{i_1} \text{ et } w_2 = c + d\mathbf{i_1}$$

et donc

$$w = a + b\mathbf{i_1} + c\mathbf{i_2} + d\mathbf{i_1}\mathbf{i_2} := a + b\mathbf{i_1} + c\mathbf{i_2} + d\mathbf{j_1}$$

avec $\mathbf{j_1}^2 = 1$ est appelée **unité hyperbolique**.

$\cdot$	1	$\mathbf{i_1}$	$\mathbf{i_2}$	$\mathbf{j_1}$
1	1	$\mathbf{i_1}$	$\mathbf{i_2}$	$\mathbf{j_1}$
$\mathbf{i_1}$	$\mathbf{i_1}$	-1	$\mathbf{j_1}$	$-\mathbf{i_2}$
$\mathbf{i_2}$	$\mathbf{i_2}$	$\mathbf{j_1}$	-1	$-\mathbf{i_1}$
$\mathbf{j_1}$	$\mathbf{j_1}$	$-\mathbf{i_2}$	$\mathbf{i_1}$	1

TABLE 1 – Relations entre les unités

Définition 3.2. Soit $s = s_1 + s_2\mathbf{i_2}$ et $t = t_1 + t_2\mathbf{i_2}$.

- **Addition :** $s + t := (s_1 + t_1) + (s_2 + t_2)\mathbf{i_2}$;
- **Multiplication :** $s \cdot t := (s_1t_1 - s_2t_2) + (s_1t_2 + s_2t_1)\mathbf{i_2}$;
- **Norme :** $\|s\|_2 := \sqrt{|s_1|^2 + |s_2|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Proposition 3.1. $(\mathbb{M}(2), +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire. Muni de la norme $\|\cdot\|_2$ ci-haut, ceci forme un espace vectoriel normé (addition et multiplication scalaire habituelle).

On remarque que $\frac{1+\mathbf{j_1}}{2}$ et $\frac{1-\mathbf{j_1}}{2}$ sont des diviseurs de zéro et ils ne sont pas inversibles. Ces éléments sont tellement importants qu'on leur attribut une notation spéciale !!!

$$\gamma_0 := \frac{1 + \mathbf{j_1}}{2} \text{ et } \overline{\gamma_0} := \frac{1 - \mathbf{j_1}}{2}.$$

Définition 3.3. $\mathcal{NO}_2$ est l'ensemble des éléments non-inversibles et est appelé le cône-nul.

Proposition 3.2. $w \in \mathcal{NO}_2 \iff (w_1 - w_2\mathbf{i_1})(w_1 + w_2\mathbf{i_1}) = 0$.

Démonstration.
La faire si le temps le permet. Trouver les solutions du système $wt = 1$ pour un certain $t \in \mathbb{M}(2)$. $\square$

Proposition 3.3. Soit $s = s_1 + s_2\mathbf{i_2}$ et $t = t_1 + t_2\mathbf{i_2}$ deux nombre bicomplexes. Alors,

1. $\|st\|_2 \leq \sqrt{2}\|s\|_2\|t\|_2$;
2. $\frac{1}{\|s\|_2} \leq \sqrt{2}\|s^{-1}\|_2$.

Démonstration.
(a) est à faire en exercice. Pour (b), remarquer que $ss^{-1} = 1$, calculer la norme et utiliser (a) □

Questions Quelles sont les différences entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{M}(2)$?

- $(\mathbb{M}(2), +, \cdot)$ possède des éléments qui ne sont pas inversibles ! N'empêche, les éléments inversibles sont situés exactement où on veut qu'il soit (ou qu'ils veulent qu'ils soient... euh ouin tant pis !)
- Il constitue en fait une extension naturelle des nombres complexes et des nombres hyperboliques $\mathbb{D} := \{x + y\mathbf{j} : x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{j}^2 = 1\}$. Ces ensembles sont identifiés à $\mathbb{M}(1)$ et $\mathbb{D}(\mathbf{j_1}) := \{x + y\mathbf{j_1} : x, y \in \mathbb{R}\}$.

3.2 Représentation idempotente

Définition 3.4. Un élément $\gamma \in \mathbb{M}(2)$ est idempotent si $\gamma^2 = \gamma$.

Proposition 3.4. 0, 1, γ_0 et $\overline{\gamma_0}$ sont les seuls éléments idempotents de l'espace $\mathbb{M}(2)$.

Démonstration.
Détailler les solutions du système $\gamma^2 = \gamma$. □

Remarque 2. De plus, on a $\gamma_0 \cdot \overline{\gamma_0} = 0$ et $\gamma_0 + \overline{\gamma_0} = 1$ ▲

Proposition 3.5. Tout nombre $w \in \mathbb{M}(2)$ s'écrit de manière unique comme

$$w = (w_1 - w_2\mathbf{i_1})\gamma_0 + (w_1 + w_2\mathbf{i_1})\overline{\gamma_0}.$$

Démonstration.
Simplement multiplier le tout et vérifier que c'est bien égal... □

Corollaire 3.1. Posons $s = s_1 + s_2\mathbf{i_2}$ et $t = t_1 + t_2\mathbf{i_2}$. Alors,

(a) $s = 0 \iff s_1 - s_2\mathbf{i_1} = 0$ et $s_1 + s_2\mathbf{i_1} = 0$;

(b) $s \cdot t := (s_1 - s_2\mathbf{i_1})(t_1 - t_2\mathbf{i_1})\gamma_0 + (s_1 + s_2\mathbf{i_1})(t_1 + t_2\mathbf{i_1})\overline{\gamma_0}$;

(c) $\|w\|_2 := \left(\frac{|s_1 - s_2\mathbf{i_1}|^2 + |s_1 + s_2\mathbf{i_1}|^2}{2}\right)^{1/2}$;

(d) $s \in \mathcal{NO}_2 \iff s_1 - s_2\mathbf{i_1} = 0$ ou $s_1 + s_2\mathbf{i_1} = 0$;

(e) Si $t \notin \mathcal{NO}_2$, alors

$$\frac{s}{t} = \left(\frac{s_1 - s_2\mathbf{i_1}}{t_1 - t_2\mathbf{i_1}}\right)\gamma_0 + \left(\frac{s_1 + s_2\mathbf{i_1}}{t_1 + t_2\mathbf{i_1}}\right)\overline{\gamma_0}.$$

Démonstration.
Faire la preuve de (c). □

Proposition 3.6. Soit $s, t \in \mathbb{M}(2)$. Alors, $\|st\|_2 = \|s\|_2\|t\|_2 \iff |s_1 - s_2\mathbf{i_1}| = |t_1 - t_2\mathbf{i_1}|$ et $|s_1 + s_2\mathbf{i_1}| = |t_1 + t_2\mathbf{i_1}|$.

Démonstration.
Développer $\|st\|_2^2$ et $\|s\|_2^2\|t\|_2^2$. □

Donc, on voit que $\mathbb{M}(2)$ est une duplication des nombres complexes et qu'avec la représentation idempotente, la multiplication se fait de termes à termes !

Ceci permet aussi de facilement généraliser les concepts de l'analyse complexe à l'espace des nombres bicomplexes.

Définition 3.5. Un produit $\mathbb{M}(2)$-cartésien de deux ensembles $X_1, X_2 \subset \mathbb{M}(1)$ est

$$X_1 \times_{\gamma_0} X_2 := \left\{u_{\gamma_0}\gamma_0 + u_{\overline{\gamma_0}}\overline{\gamma_0} \,:\, u_{\gamma_0} \in X_1 \text{ et } u_{\overline{\gamma_0}} \in X_2\right\}.$$

Remarque 3. L'application $\Gamma_0 : X_1 \times X_2 \to X_1 \times_{\gamma_0} X_2$, $(u, v) \mapsto u\gamma_0 + v\overline{\gamma_0}$ est un homéomorphisme.

Ceci conduit à

i) Boule ouverte de $\mathbb{M}(1)$: $B_1(a, r) := \{z \in \mathbb{M}(1) \,:\, |z - a| < r\}$ où $a \in \mathbb{M}(1)$ et $r > 0$.

ii) Boule ouverte de $\mathbb{M}(2)$: $B_2(a, r) := \{w \in \mathbb{M}(2) \,:\, \|w - a\|_2 < r\}$ où $a \in \mathbb{M}(2)$ et $r > 0$.

iii) Disque ouvert de $\mathbb{M}(2)$: $D_2(a, r_1, r_2) := B_1(a_1 - a_2\mathbf{i_1}, r_1) \times_{\gamma_0} B_1(a_2 + a_2\mathbf{i_1}, r_2)$ où $a \in \mathbb{M}(2)$ et $r_1, r_2 > 0$.

▲

Enfin, posons $c_m = c_{1m} + c_{2m}\mathbf{i_2}$ pour $m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ avec $c_n \notin \mathcal{NO}_2$. Un polynôme à valeurs bicomplexes $P(w) = \sum_{m=0}^{n} c_m z^m$ peut être réécrit comme

$$P(w) = P_1(w_1 - w_2\mathbf{i_1})\gamma_0 + P_2(w_1 + w_2\mathbf{i_1})\overline{\gamma_0}$$

où $P_1(z) := \sum_{m=0}^{n}(c_{1m} - c_{2m}\mathbf{i_1})z^m$ et $P_2(z) := \sum_{m=0}^{n}(c_{1m} + c_{2m}\mathbf{i_1})z^m$.

3.3 Exercice

1. Démontrer que si $c_1\gamma_0 + c_2\overline{\gamma_0} = 0$ pour $c_1, c_2 \in \mathbb{M}(1)$, alors $c_1 = c_2 = 0$.
2. Démontrer que si $w_1 + w_2\mathbf{i_2} = (w_1 - w_1\mathbf{i_1})\gamma_0$ et $w_1 + w_2\mathbf{i_2} = (w_1 + w_2\mathbf{i_1})\overline{\gamma_0}$, alors $w_1 + w_2\mathbf{i_2} = 0$.
3. Démonter que
   (a) si $z \in \mathbb{M}(1)$, alors $\|zw\|_2 = |z|\|w\|_2 \ \forall w \in \mathbb{M}(2)$;

(b) si $s \in \mathbb{M}(2)$, alors $\|st\|_2 \leq \sqrt{2}\|s\|_2\|t\|_2$;

(c) poser $s = t = \gamma_0$ et calculer la norme de γ_0^2. En déduire que la constante $\sqrt{2}$ est la meilleure possible.

4. Montrer que si $w = w_1 + w_2\mathbf{i_2}$ est inversible, alors
$$w^{-1} = \frac{w_1 - w_2\mathbf{i_2}}{w_1^2 + w_2^2}.$$

5. Considérer une matrice A de dimension 2×2 donnée par $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ où $a_{ij} \in \mathbb{M}(2)$. On note aussi cette matrice par $A = (a_{ij})$. Définissons $|A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ comme étant le déterminant de cette matrice.

   (a) Démontrer que si A et B sont deux matrices dont les éléments sont dans $\mathbb{M}(2)$, alors $|AB| = |A||B|$.

   (b) Posons $a_{ij} = \alpha_{ij}\gamma_0 + \beta_{ij}\overline{\gamma_0}$ pour chaque $i, j = 1, 2$. Montrer que
$$|A| = |(\alpha_{ij})|\gamma_0 + |(\beta_{ij})|\overline{\gamma_0}.$$

   (c) Considérons le système d'équations suivant
$$A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
où $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)$. Si $|A|$ est inversible, alors démontrer que l'unique solution est donnée par
$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

6. Définissons la conjugaison $\dagger$ par $w^\dagger = (w_1 + w_2\mathbf{i_2})^\dagger := \overline{w_1} - \overline{w_2}\mathbf{i_2}$. Démontrer que
$$ww^\dagger = |w_1 - w_2\mathbf{i_1}|^2\gamma_0 + |w_1 + w_2\mathbf{i_1}|^2\overline{\gamma_0}.$$

7. Définissons $I_1 := \{w\gamma_0 \,:\, w \in \mathbb{M}(2)\}$ et $I_2 := \{w\overline{\gamma_0} \,:\, w \in \mathbb{M}(2)\}$.

   (a) Montrer que $I_1 \cap I_2 = \{0\}$;

   (b) Montrer que $w \in \mathcal{NO}_2$ si et seulement si $w \in I_1 \cup I_2$;

   (c) Montrer que $\mathcal{NO}_2$ est un ensemble fermé d'intérieur vide. En déduire que l'ensemble des éléments inversibles est ouvert et dense dans $\mathbb{M}(2)$.

8. Considérer le polynôme $P(w)$ tel que mentionné à la fin de la section 3.2. Démontrer que si $c_n \notin \mathcal{NO}_2$, alors P a exactement n^2 solutions (Indice : utiliser la représentation idempotente du polynôme $P(w)$).

4 Applications en systèmes dynamiques

4.1 Notations

- n composition d'une fonction f : $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
- On désigne par f_c la fonction polynômiale $f_c(z) := z^2 + c$.
- $d(z, E) := \min\{d(z, w) \,:\, w \in E\}$.

4.2 Définitions de base

Définition 4.1. L'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_c^2$ du polynôme f_c est définie par

$$\mathcal{K}_c^2 := \{z \in \mathbb{M}(1) \,:\, (f_c^m(z))_{m\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}\}$$

Définition 4.2. L'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}^2$ associé au polynôme f_c est

$$\mathcal{M}^2 := \{c \in \mathbb{M}(1) \,:\, (f_c^m(0))_{m\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}\}$$

Lorsque $\mathcal{K}_c^2$ est connexe, il existe une application conforme $\phi_c : \mathbb{M}(1)\backslash\mathcal{K}_c^2 \to \mathbb{M}(1)\backslash\overline{B_1}(0,1)$. On peut ainsi associé une fonction de Green G

$$G(z) := \begin{cases} 0 & \text{si } z \in \mathcal{K}_c^2 \\ \ln|\phi_c(z)| & \text{si } z \notin \mathcal{K}_c^2 \end{cases}$$

Il existe une application conforme (voir [1]) $\psi : \mathbb{M}(1)\backslash\mathcal{M}^2 \to \mathbb{M}(1)\backslash\overline{B_1}(0,1)$ où $\psi(c) := \phi_c(c)$. On peut aussi définir une fonction de Green

$$G(c) := \begin{cases} 0 & \text{si } c \in \mathcal{M}^2 \\ \ln|\psi(c)| & \text{si } c \notin \mathcal{M}^2. \end{cases}$$

D. Rochon a défini l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe (voir [7]). Une manière équivalente de le définir est :

Définition 4.3. L'ensemble de Mandelbrot bicomplexe $\mathcal{M}_2^2$ est définie comme

$$\mathcal{M}_2^2 := \mathcal{M}^2 \times_{\gamma_0} \mathcal{M}^2.$$

4.3 Estimation de la distance

D'abord, grâce à la fonction de Green, on obtient une estimation sur la distance d'un point $c \notin \mathcal{M}^2$ à l'ensemble $\mathcal{M}^2$.

Proposition 4.1. Soit $c \notin \mathcal{M}^2$, alors

$$\frac{\sinh(G(c))}{2e^{G(c)}|G'(c)|} < d(c, \mathcal{M}^2) < \frac{2\sinh(G(c))}{|G'(c)|}.$$

La borne inférieure peut-être approchée comme

$$\frac{\sinh(G(c))}{2^{G(c)}|G'(c)|} \sim \frac{|c_m|\ln|c_m|}{|c_m|^{1/p^m}|c_m'|}.$$

Dans l'espace des nombres bicomplexes, il est possible de démontrer la propriété suivante.

Proposition 4.2. Soit $c \notin \mathcal{M}_2^2$ avec $c := c_1 + c_2\mathbf{i_2}$, alors

$$d(c, \mathcal{M}_2^2) = \sqrt{\frac{d(c_1 - c_2\mathbf{i_1}, \mathcal{M}^2)^2 + d(c_1 + c_2\mathbf{i_1}, \mathcal{M}^2)^2}{2}}.$$

En posant

$$G_2(c) := G(c_1 - c_2\mathbf{i_1})\gamma_0 + G(c_1 + c_2\mathbf{i_1})\overline{\gamma_0}$$

on peut estimer la distance d'un point $c \notin \mathcal{M}_2^2$ à l'ensemble $\mathcal{M}_2^2$.

On utilise pour cela la technique du ray tracing afin de fournir une représentation 3D de l'ensemble de Mandelbrot !

4.4 Ray-tracing

Voir diaporama.

Références

[1] A. Douady and J. H. Hubbard. Étude dynamique des polynômes complexes. Technical report, Henri Poincaré, 2007. Documents publié par la Société Mathématique de France.

[2] V. Garrant-Pelletier and D. Rochon. On a Generalized Fatou-Julia Theorem in Multicomplex Spaces. *Fractals*, 17(3), 2009.

[3] M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, and A. Vajiac. *Bicomplex Holomorphic Functions : Algebra, Geometry and Analysis of Bicomplex Numbers*. Springer Birkhaüser, 2010.

[4] É. Martineau and D. Rochon. On a Bicomplex Distance Estimation for the Tetrabrot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(9), 2005.

[5] G. B. Price. *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*. Marcel Dekker Inc., 1991.

[6] D. Rochon. Sur une généralisation des nombres complexes : les tétranombres. Master's thesis, Université de Montréal, 1997.

[7] D. Rochon. A Generalized Mandelbrot Set for Bicomplex Numbers. *Fractals*, 8(4), 2000.

[8] D. Rochon. Bicomplex Dynamics and 3D Fractals. http ://www.3dfractals.com/, 2017.