MPU1052 : Calcul intégral

Cours 3

Notes de cours

Table des matières

À présent, nous allons voir quelques techniques d'intégration.

3.1 Intégration par partie

La première s'appelle *intégration par partie*. Cette technique est basée sur la formule suivante.

Formule 3.1 (d'intégration par parties)
Soit u et v deux fonctions intégrables. Alors

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Remarque 3.1

Il y a un acronyme qui permet, parfois, de guider le choix de la fonction u et de la différentielle dv. Il s'agit de L-I-A-T-E où chaque lettre représente une fonction. Il faut choisir pour u la lettre qui apparaît en premier dans l'acronyme :

L : Fonctions logarithmiques ;

I : Inverse des fonctions trigonométriques ;

A : Fonctions Algébriques ;

T : Fonctions trigonométriques ;

E : Fonctions exponentielles.

Par exemple, on doit intégrer $\int x^2 e^x \, dx$. L-I-A-T-E nous dit qu'il faut choisir x^2 comme u puisque c'est le A, pour fonctions algébriques, qui apparaît en premier dans l'acronyme. Ce truc ne fonctionne pas à tout les coups, mais il aide beaucoup pour choisir les bonnes expressions pour u et dv. ▼

Voyons immédiatement quelques exemples d'utilisation de cette formule.

Exemple 3.1
Calculer $\int xe^x \, dx$. △

Exemple 3.2
Calculer $\int x^3 \sin 4x \, dx$. △

Il peut arriver qu'après avoir intégré par partie, il n'est pas possible de compléter le processus. Par contre, dans certain cas, on peut résoudre le problème si l'intégrale $\int v \, du$ est identique à l'intégrale de départ (à une constante près). Regardons un exemple.

Exemple 3.3
Calculer $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$. △

Dans la technique d'intégration par parties, on distingue trois cas :

1. Cas avec arrêt : dans le tableau, on termine éventuellement à 0 (voir les exemples 3.1 et 3.2).

2. Cas périodique : Dans le tableau, on retombe éventuellement sur les expressions de départ (voir l'exemple 3.3).

3. Cas ni avec arrêt, ni périodique : Ceci inclut les fonctions dont la dérivée est différente de zéro et différente des fonctions de départ. Par exemple,

Exemple 3.4
Calculer $\int \ln x \, dx$ △

3.2 Intégration d'expressions trigonométriques

La deuxième technique utilise les identités trigonométriques et permet d'intégrer des expressions faisant intervenir des fonctions trigonométriques.

Rappel :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$
$1 + \cot^2 x = \cos^2 x$	$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) = \cos(x+y)\right]$
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$	

TABLE 1 – Identités trigonométriques importantes (liste non exhaustive)

L'idée est d'utiliser l'identité trigonométrique appropriée afin de ramener l'intégrante d'une fonction à une expression plus simple. On utilise ensuite, le cas échéant, la formule d'intégration par parties. Voyons quelques exemples

Exemple 3.5

Calculer $\displaystyle\int \sin^7 5x\, dx$ △

Exemple 3.6

Calculer $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^3 x\, dx.$ △

Exemple 3.7

Calculer $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx.$ △

Exemple 3.8

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{4}\right)\, du.$ △

Il y a des expressions qui font intervenir des fonctions trigonométriques plus complexes. Elles sont de la forme

$$\int tan^n ax\, dx \ , \quad \int \sec^n ax\, dx \ , \quad \int \sec^n ax \tan^m ax\, dx.$$

Vous pouvez lire les pages 221 à 223 du livre de référence afin de découvrir comment ces expressions sont intégrées. Voici les formules générales pour intégrer des expressions de la forme $\sin^n(x)$ et $\cos^n(x)$.

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$
$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-1} x\, dx \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

3.3 Application de l'intégrale

Il y a de nombreuses applications du calcul intégral. Entre autres, le travail accomplit par une force se calcule à l'aide d'une intégrale, le centre de gravité d'un corps se calcule à l'aide d'une intégral et une probabilité se calcule à l'aide d'une intégrale.

L'application que nous allons voir est le calcul de la longueur d'une courbe par le calcul intégral.

À l'aide de la dérivée, on peut représenter, à l'aide d'une ligne brisée, la courbe. On fait la somme (la limite) des longueurs des segments de la ligne brisée afin d'obtenir la longueur de la courbe.

Représentation graphique de la ligne brisée :

Voici la formule sur laquelle on va se baser pour calculer la longueur d'une courbe.

Formule 3.2 (**longueur d'arc**)
Si f est une fonction telle que f' est continue sur $[a, b]$, alors la longueur L de la courbe joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Exemple 3.9

Rappelons la définition de la fonction cosinus hyperbolique vue au cours de calcul différentiel :

$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La courbe de cette fonction se retrouve naturellement dans la forme des toiles d'araignée ou systématiquement dans la courbe que prend un fil suspendu entre deux extrémités. Calculons la longueur L de la courbe sur $[-5, 5]$. △

3.4 Exercices

Les exercices suggérés se trouvent au chapitre 4 du livre de référence *Calcul intégral*.

Section 4.1 : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8.

Section 4.2 : 1 ; 6.

Secction 5.3 2 a) et d).