MPU1052 : Calcul intégral

Cours 2

Notes de cours

Table des matières

2.1 Les sommes de Riemann

Nous avons besoin du concept de partition d'un intervalle $[a, b]$.

Définition 2.1. *Soit un intervalle fermé* $[a, b]$.

(a) Une ***partition*** *de* $[a, b]$ *est une suite de nombres réels* x_0, x_1, …, x_{n-1}, x_n *telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Une partition est notée par $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.

(b) La longueur $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ *est la longueur de l'intervalle* $[x_{i-1}, x_i]$ *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. *On note aussi le* ***pas*** *de la partition par* $p := \max_{0 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Représentation graphique d'une partition :

Pour définir l'intégrale d'une fonction, nous avons besoin des sommes de Riemann.

Définition 2.2 (**De sommes de Riemann**)**.** *Soit une fonction f continue sur $[a, b]$ et P une partition de l'intervalle $[a, b]$. Une **Somme de Riemann** est de la forme*

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

où $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Représentation graphique d'une somme de Riemann :

2.2 Intégrale définie

L'intégrale définie s'interprète comme l'aire délimitée par la courbe de la fonction et l'axe des abscisses (l'axe des x). Formellement, elle est définie comme suit

Définition 2.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et P une partition de $[a, b]$. L'intégrale définie de f, noté $\int_a^b f(x)\,dx$ est définie par*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{(\max \Delta x_i \to 0)} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

si cette limite existe.

Remarque 2.1

Si la limite existe, on dit que la fonction f est **intégrable** sur $[a, b]$

L'intégrale est donc la somme des aires des rectangles de hauteur $f(c_i)$ et de largeur Δx_i. Ces rectangles deviennent de plus en plus minces et à la limite ceci donne l'aire délimitée par la courbe de la fonction et l'axe des abscisses (l'axe des x).

Une fonction continue f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ ▼

Dans ce cours, les intégrales ne seront jamais calculées à l'aide de cette dernière définition. Nous allons voir, plus tard, différentes techniques afin d'intégrer une fonction sur un intervalle.

2.3 Théorème fondamental et propriétés

Voici quelques propriétés de l'intégrale définie.

Proposition 2.1. *Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors*

(a) $\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx = 0$ *pour tout* $c \in \mathrm{Dom}\, f$.

(b) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple 2.1

Calculer $\displaystyle\int_2^2 (x^{100} + 2x)\,dx$. △

Exemple 2.2

Si $\displaystyle\int_{-1}^{-2} x\,dx = -\frac{3}{2}$, calculer $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x\,dx$. △

Théorème 2.1. *Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Exemple 2.3

Si $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$, calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$. △

Théorème 2.2. *Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et $k \in \mathbb{R}$ une constante.*

(a) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx\,;$

(b) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx.$

Exemple 2.4

Si $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx = 10$ et $\displaystyle\int_0^3 g(x)\, dx = -5$, calculer $\displaystyle\int_0^3 (f(x) + g(x))\, dx$. △

Exemple 2.5

Si $\displaystyle\int_{-10}^{-5} f(x)\, dx = 2$, calculer $\displaystyle\int_{-10}^{5} 100f(x)\, dx$. △

Un théorème très important dans le calcul intégral est le théorème fondamental du calcul.

Théorème 2.3 (fondamental du calcul). *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$.*

(a) Si $A(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\, dx$, où $x \in I$, alors $A(x)$ est une primitive de $f(x)$.

(b) Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

où a, $b \in I$.

Remarque 2.2

La valeur de l'intégrale définie ne dépend pas de la primitive choisie, c'est-à-dire, si $G(x)$ et $F(x)$ sont deux primitives de f, alors $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

La partie (b) est la plus importante pour nous. ▼

Donc pour évaluer l'intégrale définie d'une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, il suffit de lui trouver une primitive, d'évaluer cette primitive au borne de l'intervalle $[a, b]$ et de faire la différence.

Donnons quelques exemples d'utilisation du théorème fondamental du calcul.

Exemple 2.6

Évaluer $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$. △

Exemple 2.7

Évaluer $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$. △

L'exemple 2.6 illustre l'évaluation d'une intégrale définie à l'aide d'un changement de variable. Pour simplifier les choses, on peut changer les bornes d'intégration en les exprimant à l'aide de notre changement de variable. Le théorème suivant nous assure qu'on peut le faire.

Théorème 2.4. *Si f' est une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ et si g est une fonction continue sur un intervalle I contenant* $\operatorname{Ima} f$, *alors*

$$\int_a^b g(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\, du$$

où $u := f(x)$.

Exemple 2.8

Calculer $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, dx$ en changeant les bornes d'intégration. △

Exemple 2.9

Calculer $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\, dx$ en changeant les bornes d'intégration. △

2.4 Calculs d'aire délimitée par des courbes

L'intégrale définie permet de calculer l'aire d'une région délimitée par certaines courbes.

Représentation de l'aire entre deux courbes :

D'une manière générale, un problème de calcul d'aire de régions est donné avec quatre informations au maximum qui délimitent la régions :

(1) Les courbes y_1 et y_2.

(2) Les courbes x_1 et x_2.

Aire entre deux courbes de fonctions Les étapes à suivre pour calculer l'aire délimitée entre deux fonctions d'équation $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$ sont les suivantes :

1) Déterminer les points d'intersection entre les deux courbes y_1 et y_2, c'est-à-dire chercher les points x tels que $y_1 = y_2$. Ceux-ci, dans la majorité des cas, donnent les bornes d'intégration.

2) Représenter graphiquement les régions ainsi qu'un élément d'aire sur chacune des régions. Ceci permet de déterminer si on doit intégrer $y_2 - y_1$ ou $y_1 - y_2$.

3) Évaluer l'aire de chacune des régions et faire la somme pour obtenir l'aire totale.

Exemple 2.10

Évaluer l'aire A de la région délimitée par $y_1 = x^2 - 4$ et $y_2 = 14 - x^2$. △

Les courbes peuvent aussi être exprimées en fonction de y, c'est-à-dire $x_1 = f(y)$ et $x_2 = g(y)$.

Exemple 2.11

Évaluer l'aire A de la région délimitée par $x_1 = \dfrac{y^3}{4}$ et $x_2 = y$. △

Terminologie :

(a) Une région fermée située sous la courbe d'une fonction $f(x)$ et au-dessus de l'axe des x signifie que $y_2 = f(x)$ et $y_1 = 0$. On doit résoudre $y_2 = 0$ pour trouver les bornes d'intégration, e.g. x_1 et x_2.

(b) Une région fermée située sous la courbe d'une fonction $g(y)$ et l'axe des y signifie que $x_2 = 0$ et $x_1 = g(y)$ si $g(y)$ est à gauche de l'axe des y ou $x_2 = g(y)$ et $x_1 = 0$ si $g(y)$ est à droite de l'axe des y.

2.5 Exercices

Les exercices se trouvent au chapitre 3 du livre de référence. Ils débutent à la page 147.

Lecture recommandée : Section 3.5, p.161-169 ; Section 3.6 p.170-183 pour des applications (n'est pas à l'examen).

Section 3.2 : 1 a).

Section 3.3 : 6 ; 7.

Section 3.4 : 1 ; 2 ; 3 ; 4(optionnel). Pour le numéro 4, vous aurez besoin du théorème de la moyenne qui n'a pas été vu dans le cours et qui se retrouve à la page 154 du livre.

Section 3.5 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7.