MPU1052 : Calcul intégral

Cours 1

Notes de cours

Table des matières

1.1 La différentielle

Nous avons vu dans le cours de calcul différentiel le taux de variation moyen d'une fonction $f(x)$. Ce taux de variation sur un intervalle $[x_1, x_2] \subseteq \text{Dom}\, f$ s'exprime comme ceci

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

où $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ et $\Delta x = x_2 - x_1$.

La **différentielle** dy d'une fonction $y = f(x)$ permet d'approcher la variation de la fonction $f(x)$ pour une variation Δx.

Représentation graphique de la différentielle d'une fonction

Définition 1.1 (de la différentielle). *Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable.*

(a) La différentielle de x, notée dx, est définie par $dx = \Delta x$.

(b) La différentielle de y, notée dy, est définie par $dy = f'(x)\,dx$ où $f'(x)$ est la dérivée de f au point x.

Calculons la différentielle de quelques fonctions.

Exemple 1.1

Soit $f(x) = x^2$. △

Exemple 1.2

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 1$ △

Exemple 1.3

Soit $Q(t) = \dfrac{30}{2t + 15}$ △

Exemple 1.4

Soit $u(r) = \operatorname{Arc}\cot(r^2 + 1)$. △

La différentielle a des applications pratiques pour calculer, entre autres, la racine carrée d'un nombre.

Exemple 1.5

Approcher la valeur de $\sqrt{105}$ à l'aide de la différentielle. △

1.2 La primitive d'une fonctions

Définition 1.2 (d'une primitive). *Une fonction F est une primitive (ou antidérivée) d'une fonction f si $F'(x) = f(x)$.*

Exemple 1.6

Quelle est la primitive de $\cos(x)$? △

Exemple 1.7

Quelle est la primitive de $8x^3 + e^{5x}$? △

Remarque 1.1

Il peut y avoir plusieurs primitives d'une fonction. Par exemple, les fonction $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 + 2$ sont toutes les deux des primitives de $f(x) = 2x$ puisque $F'(x) = 2x = G'(x)$. ▼

1.3 L'indégrale indéfinie

Nous allons maintenant introduire la notion de l'intégrale indéfinie.

Définition 1.3. *L'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ est*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.2

Le symbole $\int$ est le **signe d'intégration**. Le nombre C est la **constante d'intégration**. La fonction $f(x)$ est appelée l'**intégrande**. La différentielle dx indique la **variable d'intégration**.

La constante C doit toujours apparaître lorsqu'on calcule l'intégrale indéfinie. ▼

Donnons quelques exemples d'intégration de fonctions de base.

Exemple 1.8

Effectuer $\int x^2\,dx$. △

Exemple 1.9

Effectuer $\int \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\,d\theta$. △

Exemple 1.10

Effectuer $\int \cos t\,dt$ △

Exemple 1.11

Effectuer $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$. △

Le tableau 1 contient les formules d'intégration des fonctions de base.

Le théorème suivant énonce quelques propriétés de l'intégrale indéfinie.

Théorème 1.1. *Si $k \in \mathbb{R}$, alors*

(a) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;

(b) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Remarque 1.3

La propriété (b) est aussi vraie pour un nombre quelconque de fonctions, c'est-à-dire si f_1, f_2, ..., f_n sont des fonctions et k_1, k_2, ..., k_n sont des nombres réels, alors

$$\int [k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \ldots + k_nf_n(x)]\,dx = k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx.$$

▼

Intégrandes	**Intégration**	**Intégrandes**	**Intégration**
$x^r,\ r \neq -1$	$\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$	e^x	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$a^x \ln a$	$\int a^x \ln a\,dx = a^x + C$
$\cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\cos x + C$
$-\sin x$	$\int -\sin x\,dx = \cos x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arc}\tan x + C$
$-\csc^2 x$	$\int -\csc^2 x\,dx = \cot x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arc}\cot x + C$
$\sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{Arc}\sec x + C$
$-\csc x \cot x$	$\int -\csc x \cot x\,dx = \cot x$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{Arc}\csc x + C$

Table 1 – Formules d'intégration de base

Les intégrandes vus jusqu'à présent sont très simples. Il peut arriver que les intégrandes sont très compliquées à intégrer à première vue. Afin d'intégrer certaines expressions, on peut utiliser les artifices de calculs (vus dans le cours 1 du cours *Calcul différentiel*). Donnons quelques exemples.

Intégrer les expressions suivantes

Exemple 1.12

$$\int (x^2+4)^2 \sqrt[3]{x}\,dx.$$ △

Exemple 1.13

$$\int \left(\frac{4x^3-5x+1}{x^2}\right)\,dx.$$ △

Exemple 1.14

$$\int \tan^2\theta\,d\theta.$$ △

Exemple 1.15

$$\int \left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\,d\theta.$$ △

1.4 Intégration par changement de variable

Voici un théorème qui nous sera utile.

Théorème 1.2. *Si $G(x)$ est une primitive de g, alors $\int g(u)u'\,dx = G(u) + C$.*

Utilisons ce théorème pour le calcul de l'intégrale des fonctions tan et cot.

Exemple 1.16

Calculer $\int \tan x \, dx$. △

Exemple 1.17

Calculer $\int \sec x \, dx$. △

Voici une liste de formules de certaines intégrations établies par le théorème 1.2.

Intégration	**Intégration**
$\int \tan u \, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int \sec u \, du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
$\int \cot u \, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	$\int \csc u \, du = -\ln\lvert\csc u + \cot u\rvert + C$

Table 2 – Formules d'intégration des fonction tan, cot, sec et csc

Examinons quelques exemples d'intégration qui utilisent le théorème 1.2.

Exemple 1.18

Effectuer $\int 5x^2\sqrt{2x^3+1}\, dx$. △

Exemple 1.19

Effectuer $\int \cos\left(\frac{6\theta+3}{3}\right) d\theta$. △

Exemple 1.20

Effectuer $\int \sin^5 3\theta \cos 3\theta \, d\theta$. △

Exemple 1.21

Effectuer $\int e^{\sin x}\cos x + \frac{3x^4}{1+x^{10}}\, dx$. △

Exemple 1.22

Effectuer $\int \frac{4y^3+7y+5}{y^2+1}\, dy$. △

Exemple 1.23

Effectuer $\int t\sqrt{2t-1}\, dt$. △

1.5 Exercices

Les exercices se retrouvent dans le chapitre 2 du livre de référence au cours. Ils commencent à la page 65. La lecture du chapitre 2 est fortement recommandée.

Section 2.1 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Section 2.2 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Section 2.3 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 (défi) ; 9.