MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 7 partie 2 et cours 8

Notes de cours

Table des matières

7.5 Analyse de fonctions algébriques

Nous allons maintenant réunir toutes les notions vues aux sections précédentes afin d'analyser certains types de fonctions.

Rappels :

Définition 7.1. *La droite verticale $x = a$ est une* ***asymptote verticale*** *de la courbe de la fonction f si au moins une des conditions suivantes est respectée.*

(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

(d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

La droite d'équation $y = b$ est une ***asymptote horizontale*** *à $-\infty$ ou $+\infty$ de la courbe de la fonction f si au moins une des conditions suivantes est vérifiée.*

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$.

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$.

Il faut se rappeler que la droite $x = a$ est une A.V. si au moins une des quatre conditions (a - d) est satisfaite. Aussi, il est possible d'avoir deux A.H., une à $+\infty$ et une à $-\infty$.

Pour analyser le comportement d'une fonction f, on doit suivre les six étapes suivantes :

(1) Déterminer le domaine de la fonction.

(2) Déterminer, si c'est possible, les asymptotes horizontale (notée A. H.) et/ou verticale (notée A. V.).

(3) Calculer $f'(x)$ et trouver les nombres critiques de f.

(4) Calculer $f''(x)$ et trouver les nombres critiques de f'.

(5) Construire un tableau de variation relatif à f' et f''.

(6) Donner une esquisse du graphique de la fonction f.

x	a		x_1		0		x_2		b
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\nexists$
$f''(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow \cup$	0	$\nearrow \cap$	$f(0)$	$\searrow \cap$	0	$\searrow \cup$	$f(b)$
types	min.		pt. infl.		max.		pt. infl.		min.

TABLE 1 – Tableau de variation de f' et f'' associé à la figure 2 (partie I).

Exemple 7.5

Donner le tableau de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}$$

et esquisser son graphique. △

Exemple 7.6

Analyser la fonction suivante

$$g(x) = x - 3x^{1/3} + 3.$$

△

7.6 Exercices

Les exercices associés à cette deuxième partie se trouvent au chapitre 6 du livre de référence.

Section 6.3 : 2 (ne faites pas g)) ; 6 a), c), f), j).

7.7 Exemples supplémentaires

Exemple 7.7

Analyser la fonction $f(x) = \cos x$. △

Exemple 7.8

Analyser la fonction $w(x) = \sin x$. △

Exemple 7.9

Analyser la fonction $g(x) = \sec x$ △

Exemple 7.10

Analyse la fonction cosinus hyperbolique définie par $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. △

Matière du cours 8

8.1 Problèmes d'optimisation

Un principe rencontré dans la Nature est majestueux.

> « La Nature utilise les moyens les plus économiques en énergie pour aboutir au maximum d'effet. »

Dans cette citation inspiré de Maupertuis, il y a la notion de minimisation de l'énergie et de maximisation des effets. C'est ce que nous appelons l'optimisation.

De nos jours, le calcul différentiel permet de formaliser les problèmes d'optimisation. La recherche de la plus courte distance pour se rendre d'un point A à un point B, la maximisation de ses profits, la détermination de la plus petite quantité de peinture à appliquer sur les murs d'un appartement, etc. sont des exemples de problèmes d'optimisation. Nous allons présenter une méthode systématique afin de résoudre certains problèmes d'optimisation à l'aide du calcul différentiel.

Les trois étapes.

1. Mathématisation du problème.

1.1) Si possible, faire un schéma de la situation et définir les variables.

1.2) Déterminer la fonction à optimiser.

1.3) Chercher, s'il y a lieu, une relation entre les variables.

1.4) Exprimer la fonction à optimiser en terme d'une seule variables et déterminer son domaine.

2. Analyse de la fonction à optimiser.

2.1) Trouver les points critiques.

2.2) Utiliser l'un des tests afin de déterminer la nature des points critiques.

3. Formulation de la réponse.

Problème 1. Trouver deux nombres réels dont la somme du premier et le cube du second est égal à 8 et dont le produit est maximal. Déterminons également la valeur du produit maximal.

Problème 2. Déterminer les dimensions d'une terrasse rectangulaire d'aire maximale que l'on peut aménager dans un espace demi-circulaire dont le rayon est de 4 m et calculons cette aire maximale.

Problème 3. Les pages d'un livre de mathématique ont un périmètre de 100 cm. Chaque page comprend des marges de 4 cm dans le haut, de 3 cm dnas le bas et de 2 cm de chaque côté. Sachant que l'impression est faire sur deux colonnes séparées par 1 cm, déterminer les dimensions de chaque page pour que la surface imprimée soit maximale.

8.2 Règle de l'Hôpital

Nous avons vu, au deuxième cours, comment calculer des limites de certaines formes indéterminées comme $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pour ce faire, on faisait des manipulations algébriques afin de lever l'indétermination.

Ici, nous allons voir une façon d'utiliser la dérivée pour lever les indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Voyons un exemple. On veut calculer

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}.$$

Normalement, on écrit $x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$ et on s'implifie. Cependant, on peut dérivée le numérateur et le dénominateur afin d'obtenir une nouvelle limite équivalente à la limite initiale :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 2}{1} = 2 - 2 = 0.$$

Cette méthode s'appelle la règle de l'Hôpital.

Théorème 8.1 (Règle de l'Hôpital I). *Soit f et g deux fonctions continues telles que*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ *;*

(b) *$f'(x)$ et $g'(x)$ existent ;*

(c) *$g(x)$ et $g'(x)$ diffèrent de 0 ;*

(d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe et vaut $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ ou $L = -\infty$.*

Alors,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 8.11

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$. △

Exemple 8.12

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}$. △

Exemple 8.13

Calculer $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$. △

Exemple 8.14

Calculer $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 4}$. △

Remarque 8.1

Dans certains cas, la règle peut s'appliquer plus d'une fois afin de lever l'indétermination. ▼

On a la même règle pour la forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Théorème 8.2 (**Règle de l'Hôpital II**). *Soit f et g deux fonctions continues telles que*

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(b) *$f'(x)$ et $g'(x)$ existent ;*

(c) *$g(x)$ et $g'(x)$ diffèrent de 0 ;*

(d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe et vaut $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ ou $L = -\infty$.*

Alors,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 8.15

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-7}{2-8x^3}$. △

Exemple 8.16

Calculer $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} \dfrac{\tan 2\theta}{1+\sec 2\theta}$. △

8.3 Exercices

Seuls les exercices du chapitre 7 situés à la page 321 et plus sont à faire.

Section 7.1 : 1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 14.