MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 7 (Partie I)

Notes de cours

Table des matières

Tracer un graphique peut s'avérer une tâche ardue. Dans les deux parties du cours 7, nous allons voir comment utiliser la dérivée pour faciliter ce travail. À la fin des deux parties, l'étudiant devrait être en mesure de donner une esquisse du graphique de la fonction, les intervalles de croissance et de décroissance, les maximums et les minimums de la fonction et sa concavité.

7.1 Définitions préliminaires

Définition 7.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

(a) Si pour tout $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) < f(x_2)$, alors f est ***strictement croissante*** *sur I.*

(b) Si pour tout $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) \leq f(x_2)$, alors f est ***croissante*** *sur I.*

(c) Si pour tout $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) > f(x_2)$, alors f est ***strictement décroissante*** *sur I.*

(d) Si pour tout $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, alors f est ***décroissante*** *sur I.*

Notations. La croissance est notée par la flèche $\nearrow$ et la décroissance par la flèche $\searrow$.

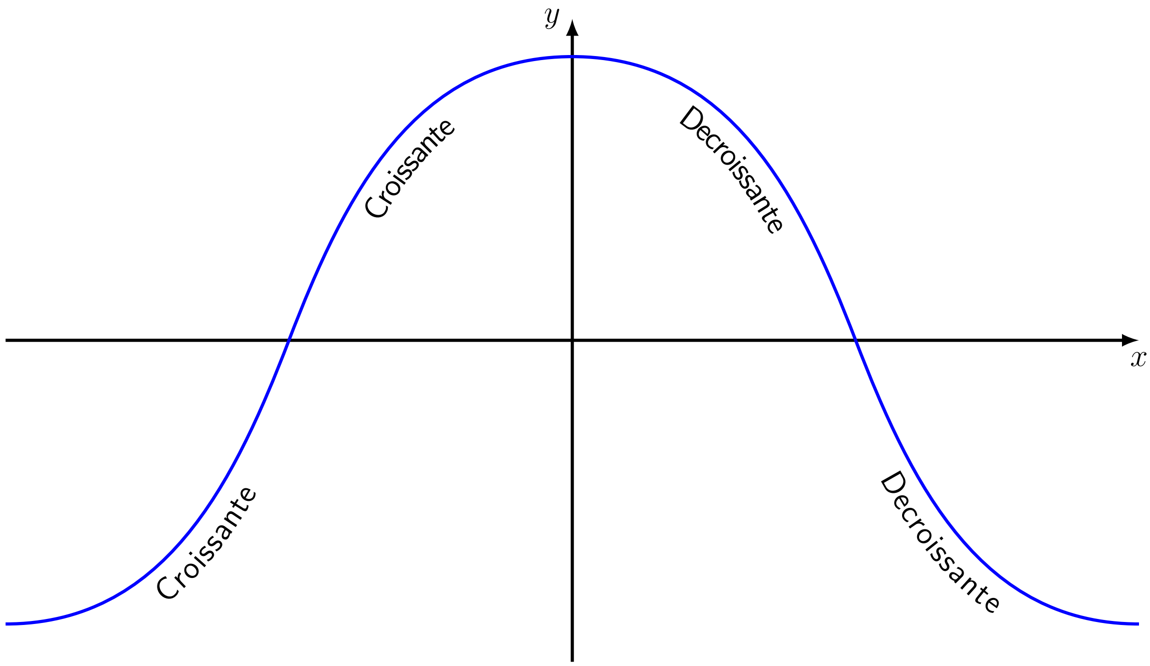

Figure 1 – Représentation graphique de la croissance et décroissance d'une fonction

La figure 1 est une représentation graphique de la définition de croissante et de décroissance d'une fonction.

Les prochaines définitions introduisent les notions de maximum et minimum locaux et absolus.

Définition 7.2. *Soit f une fonction et $c \in \operatorname{Dom} f$.*

*(a) $f(c)$ est un **maximum local** (ou relatif) de f s'il existe un intervalle ouvert I tel que $c \in I$ et $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I$. Dans ce cas, le point $(c, f(c))$ est un point de maximum local.*

*(b) $f(c)$ est un **minimum local** (ou relatif) de f s'il existe un intervalle ouvert I tel que $c \in I$ et $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I$. Dans ce cas, le point $(c, f(c))$ est un point de minimum local.*

Définition 7.3. *Soit f une fonction et $c \in \operatorname{Dom} f$.*

*(a) $f(c)$ est un **maximum absolu** (ou global) de f si $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$. Le point $(c, f(c))$ est un point de maximum absolu.*

*(b) $f(c)$ est un **minimum absolu** (ou global) de f si $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$. Le point $(c, f(c))$ est un point de minimum absolu.*

Remarque 7.1

Un point de maximum (ou minimum) absolue $(c, f(c))$ est aussi un point de maximum (ou minimum) relatif.

Lorsqu'une fonction est définie sur un intervalle $[a, b]$, les extrémités doivent être vérifiées. En effet, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ peuvent être des maximums (ou minimums) locaux (ou absolus). ▼

La figure 2 illustre la représentation géométrique des notions de maximum et minimum locaux et absolus.

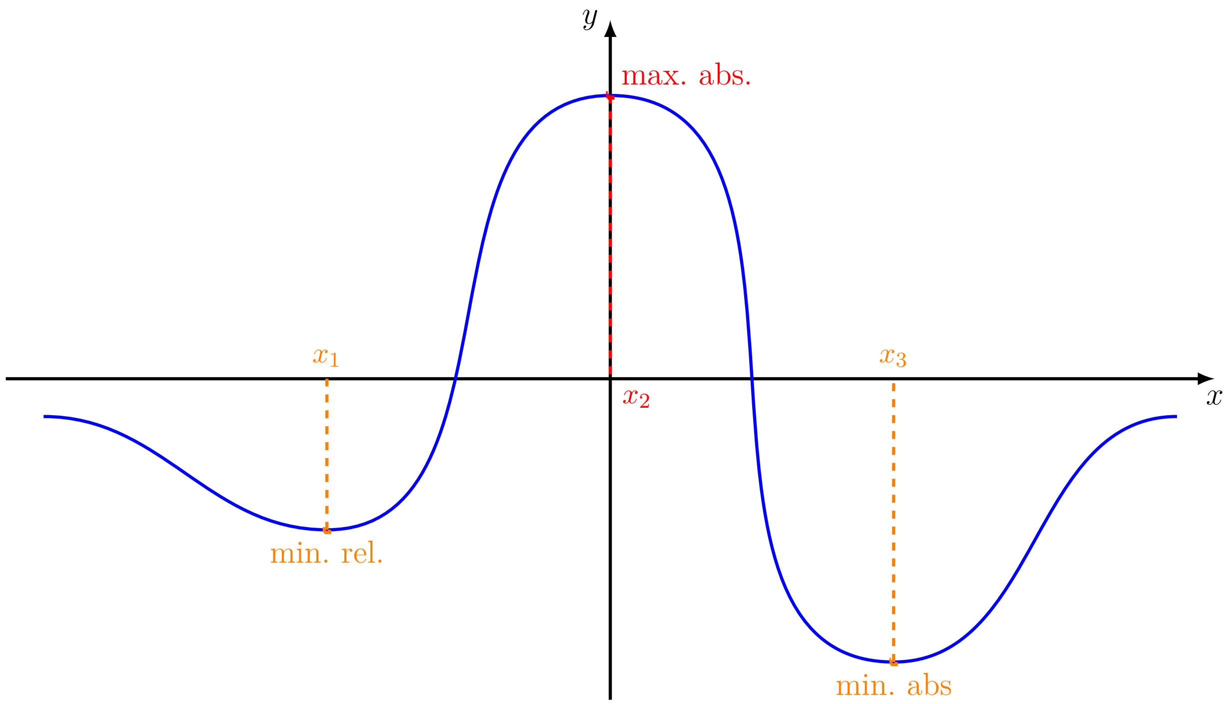

FIGURE 2 – Représentation graphique des quatre types de maximum et minimum

Définition 7.4 (de point critique). *Soit f une fonction et $c \in \operatorname{Dom} f$. Le nombre c est un **nombre critique** si : (a) $f'(c) = 0$ ou (b) $f'(c)$ n'existe pas. Dans l'un des deux cas, le point $(c, f(c))$ est un point critique de la fonction f.*

Définition 7.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que $f'(c)$ n'existe pas.*

*(a) Le point $(c, f(c))$ est un **point de rebroussement** si*

(a) la tangente en ce point est verticale (pente égale à $+\infty$ ou $-\infty$) ;

(b) $f'(x)$ change de signe lorsque x passe de c^- à c^+.

*(b) Le point $(c, f(c))$ est un **point anguleux** si en ce point, il y a deux pentes de tangentes distinctes lorsque $x \to c^-$ et $x \to c^+$.*

Définition 7.6. *Le point* $(c, f(c))$ *est un* ***point stationnaire*** *si* $f'(c) = 0$.

La figure 3 représente les trois types de point critique qu'une fonction peut avoir.

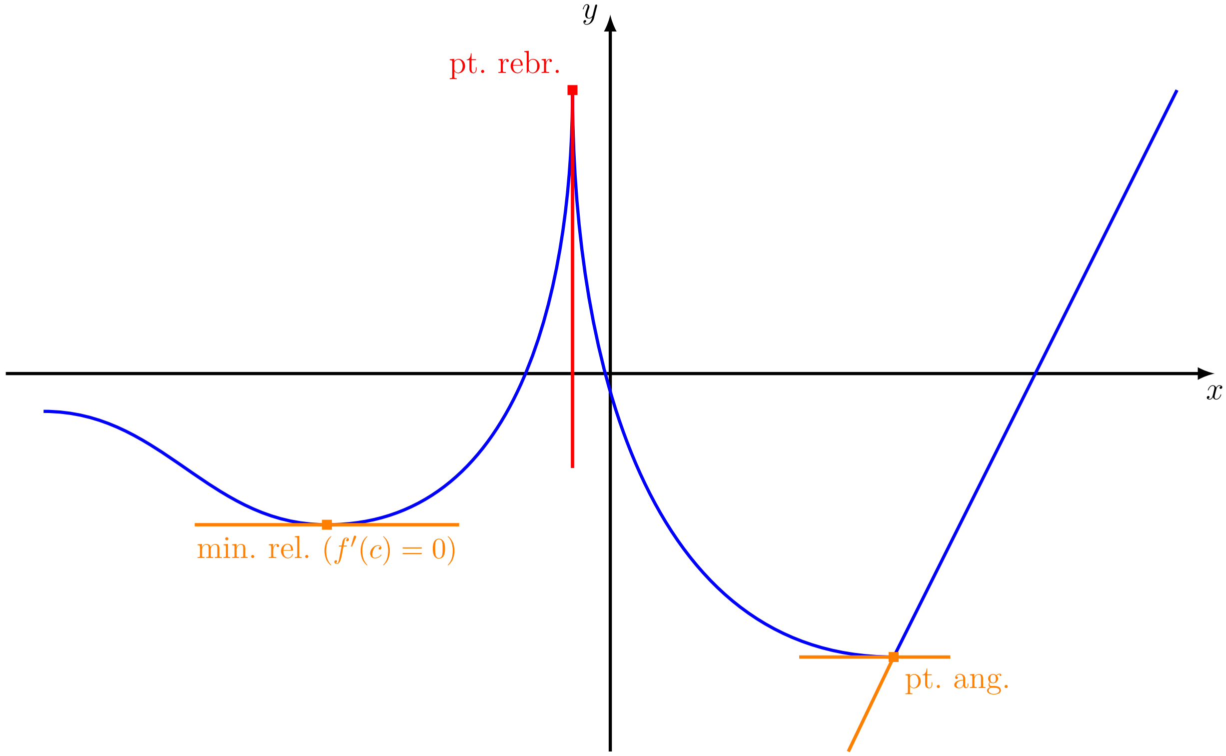

FIGURE 3 – Représentation graphique des points de rebroussement et anguleux

Exemple 7.1

Déterminer les points de rebroussement et les points anguleux de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 4 \\ \sqrt[3]{x+4} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

△

7.2 Première étude par la dérivée du premier ordre

Théorème 7.1. *Soit f, une fonction continue sur un l'intervalle $[a, b]$ telle que $f'(x)$ existe pour tout $x \in]a, b[$.*

(a) Si $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]a, b[$, alors la fonction f est croissante sur $[a, b]$.

(b) Si $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]a, b[$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.

Ce lien illustre un lien étroit entre la fonction dérivée f' et le comportement de la fonction f.

Représentation du lien entre f' et la croissance ou décroissance de f

Théorème 7.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et $c \in I$, Si $(c, f(c))$ est un point de maximum relatif (ou minimum relatif) de f, alors $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas.*

Remarque 7.2

Un maximum (ou minimum) local est un point critique. Par contre, un point critique n'est pas nécessairement un maximum (ou minimum) local. En effet, il suffit de considérer la fonction $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$ et $f'(x) = 0$ seulement si $x = 0$. Mais, nous verrons à la prochaine section que $(0, f(0))$ est un point d'inflexion et ne peut donc pas être un minimum ou maximum.

Représentation graphique de la fonction $\mathbf{f(x) = x^3}$.

▼

Ces deux derniers théorèmes nous permettent d'étudier la croissance (ou la décroissance) et de localiser les points critiques d'une fonction.

Théorème 7.3 (du test de la dérivée première). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $c \in I$ un point critique.*

(a) Si $f'(x)$ passe du signe « + » au signe « - » lorsque x passe de c^- à c^+, alors $(c, f(c))$ est un point de maximum relatif de f.

(b) Si $f'(x)$ passe du signe « - » au signe « + » lorsque x passe de c^- à c^+, alors $(c, f(c))$ est un point de minimum relatif de f.

Dans le cas où $f'(x)$ ne change pas de signe lorsque x passe de c^- à c^+, alors le point $(c, f(c))$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

L'utilisation de la dérivée première permet de trouver les extremums d'une fonction. On présente cette étude à l'aide d'un tableau, appelé **Tableau de variation de** f'. Voici deux exemples dans lesquels est montré comment construire ce tableau.

Exemple 7.2

Étudier la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ où $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. △

Exemple 7.3

Étudier la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(6x - x^2)^2}$ où $x \in [-2, 5]$. △

Remarque 7.3

Si le graphique de la fonction f' est donné, il est possible de fournir une esquisse du graphique de la fonction f pour laquelle la dérivée correspond (voir la boîte *Représentation du lien entre* f' *et la croissance ou décroissance de* f). Il existe une infinité d'esquisses possibles pour une fonction puisque la dérivée f' est à une constante près la dérivée de la fonction f (nous allons voir cela dans le cours de calcul intégral). ▼

7.3 Deuxième étude par la dérivée du deuxième ordre

Définition 7.7 (de la concavité). *Soit* f *une fonction continue sur l'intervalle* $]a, b[$.

(a) f *est* ***concave vers le haut*** *sur l'intervalle* $]a, b[$ *si la courbe de* f *est au-dessus de toutes les tangentes à la courbe de* f*. On note ce type de concavité par le symbole* $\cup$.

(b) f *est* ***concave vers le bas*** *sur l'intervalle* $]a, b[$ *si la courbe de* f *est en dessous de toutes les tangentes à la courbe de* f*. On note ce type de concavité par le symbole* $\cap$.

La figure 4 illustre la définition précédente.

Comme on peut le remarquer sur la figure 4, il y a deux points où la concavité change : de concave vers le haut à concave vers le bas, puis de concave vers le bas à concave vers le haut.

Définition 7.8. *Soit* f*, une fonction continue en* $x = c$*. Le point* $(c, f(c))$ *est un* ***point d'inflexion*** *de* f *si la courbe de* f *change de concavité lorsque* x *passe de* c^- *à* c^+.

Le théorème suivant permet de dire, en utilisant la dérivée seconde, si une fonction est concave vers le haut ou vers le bas sur un intervalle.

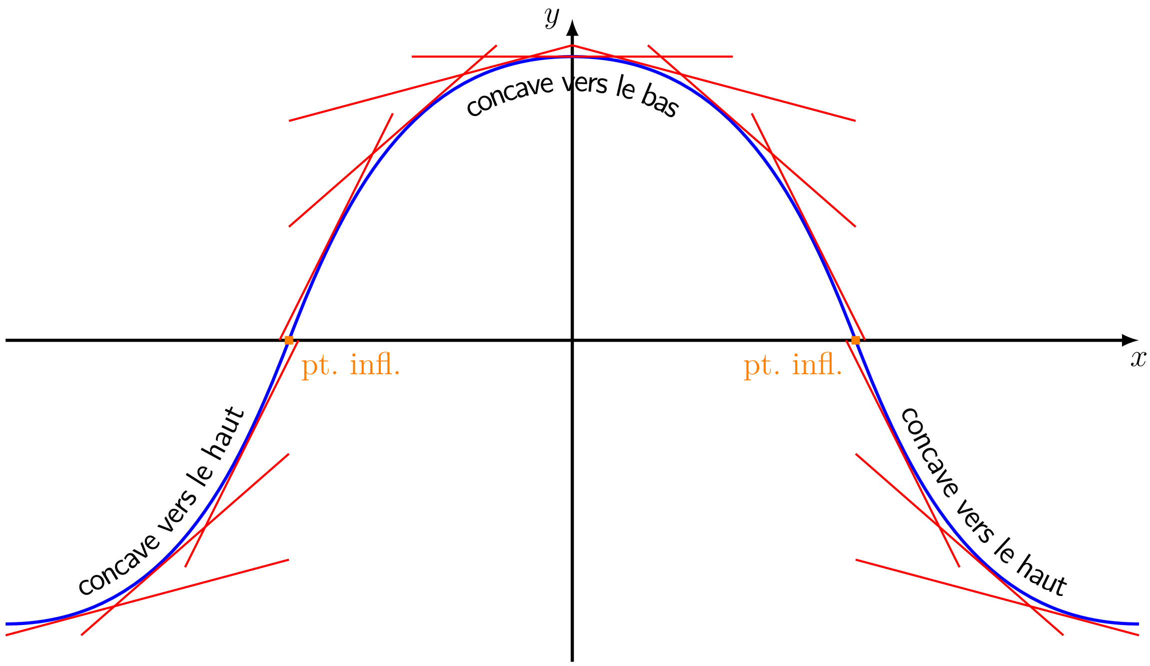

FIGURE 4 – Représentation graphique de la concavité

Théorème 7.4. *Soit f, une fonction continue sur $]a, b[$ telle que f'' existe sur l'intervalle $]a, b[$.*

(a) Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la courbe de f est concave vers le haut sur $]a, b[$.

(b) Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la courbe de f est concave vers le bas sur $]a, b[$.

Remarque 7.4

Autrement dit, dès que la dérivée première est croissante sur l'intervalle $]a, b[$, la fonction f est concave vers le haut. Puis, dès que la dérivée première est décroissante sur l'intervalle $]a, b[$, la fonction f est concave vers le bas. ▼

Théorème 7.5 (**Test I de la dérivée seconde**). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $c \in I$, un nombre critique de f tel que $f'(c) = 0$.*

(a) Si $f''(c) < 0$, alors $(c, f(c))$ est un maximum local.

(b) Si $f''(c) > 0$, alors $(c, f(c))$ est un minimum local.

Cependant, si $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ n'existe pas, alors on ne peut rien conclure.

Remarque 7.5

Si I_1 est le plus grand intervalle ouvert tel que $I_1 \subseteq I$ et $c \in I_1$, alors on peut changer le mot « local » par

« global » dans le théorème précédent. Cette dernière modification est le **test II de la dérivée seconde**.

Si les deux tests de la dérivée seconde ne mènent à rien, on utilise le test de la dérivée première. ▼

Lien entre les graphiques de f'' et f.

Exemple 7.4

Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x}$ à l'aide de la dérivée seconde. △

7.4 Exercices

Les exercices associés à ce cours se retrouvent au chapitre 6 du livre de référence. Le corrigé est à la page 468. Les tableaux de variation demandés dans les exercices utilisent seulement la ligne de f' ou la ligne de f''. Lisez bien la question pour faire le bon tableau de variation.

Lecture recommandée : section 6.1 pages 257 à 265 et section 6.2 pages 269 à 280.

Exercices préliminaires : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7.

Section 6.1 : 1 ; 5 a), d), e), h) ; 8 d) ; 10 ; 12 ; 15.

Section 6.2 : 3 a), c), d), e), f) ; 4 ; 8.