MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 6

Notes de cours

Table des matières

6.1 Rappels sur les fonctions exponentielle et logarithmique 2

6.2 Dérivée de la fonction exponentielle 4

6.3 Dérivée de la fonction logarithmique 5

6.4 Rappels sur les fonctions trigonométriques de base 6

6.5 Dérivée des fonctions sin et cos 7

6.6 Dérivées des fonctions tan, cot, sec et csc 8

6.7 Dérivées des fonctions trigonométriques inverses 9

6.8 Exemples supplémentaires 10

6.9 Exercices 11

6.1 Rappels sur les fonctions exponentielle et logarithmique

La **fonction exponentielle** est la fonction définie par

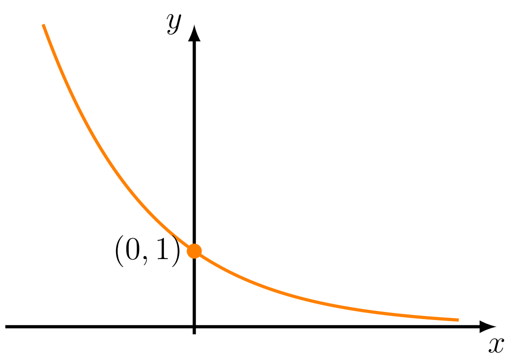
$$f(x) = a^x$$

où $a > 0$ et $a \neq 1$. Le nombre réel a est nommé la **base** et la variable x se retrouve en exposant. Le domaine et l'image de cette fonction sont

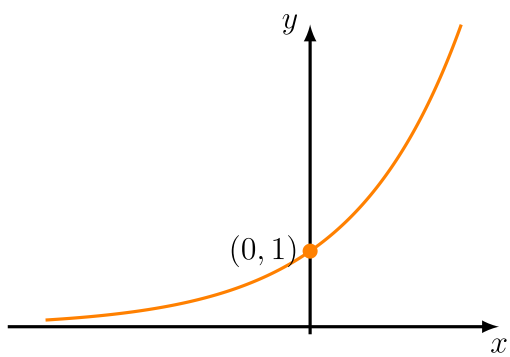
$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Ima}\, f =]0, \infty[.$$

La figure 1 illustre la représentation de la fonction f pour les deux cas possibles de la valeurs a.

Deux bases sont très importantes à se rappeler : e et 10 nommées respectivement la **base népérienne** et la **base décimale**.



(a) $f(x) = a^x$ avec $0 < a < 1$



(b) $f(x) = a^x$ avec $a > 1$

FIGURE 1 – La fonction exponentielle pour différentes valeurs de a

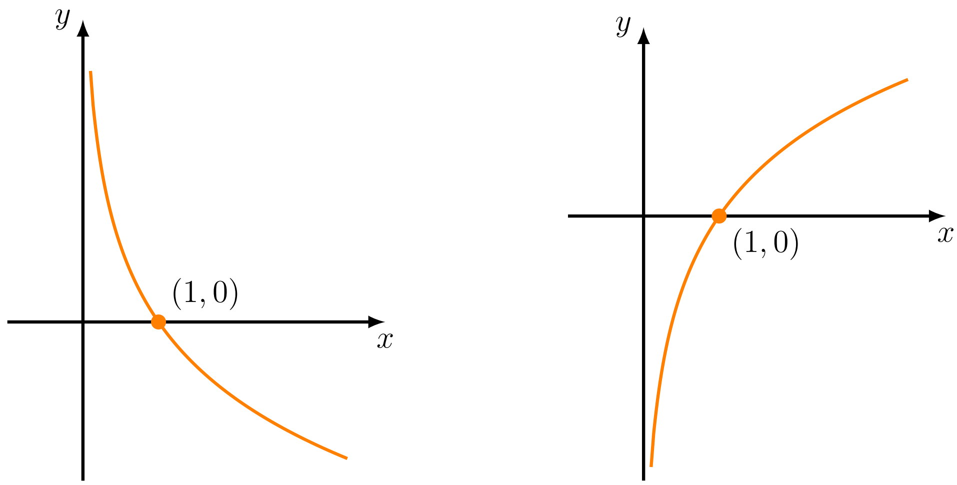
Ensuite, la **fonction logarithmique** est la fonction définie par

$$g(x) = \log_a x$$

où $a > 0$ et $a \neq 1$. Comme pour la fonction exponentielle, le nombre réel a est nommé la **base**, tandis que x est nommé l'**argument**. Le domaine et l'image de cette fonction sont

$$\text{Dom}\, g =]0, \infty[\quad \text{et} \quad \text{Ima}\, g = \mathbb{R}.$$

La figure 2 donne une représentation dans un plan cartésien de cette fonction pour certaines valeurs de la base a.



(a) $f(x) = \log_a x$ avec $0 < a < 1$

(b) $f(x) = \log_a x$ avec $a > 1$

FIGURE 2 – La fonction logarithmique pour différentes valeurs de a

Précisément, la fonction logarithmique est définie comme ceci

$$\log_a N = M \quad \Longleftrightarrow \quad a^M = N.$$

Donc, pour trouver la valeur de M pour une certaine valeur de N, il faut se poser la question simple suivante : à quel exposant (la valeur de M) devons-nous élever la base a pour obtenir N ?

Exemple 6.1

On a $\log_2 8 = 3$ puisque $2^3 = 8$. △

Exemple 6.2

On $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) = -1$ puisque $(10)^{-1} = \frac{1}{10}$. △

Théorème 6.1. *Soit N, $M > 0$, $a, b > 0$ ($a \neq 1$) et k une constante. Le logarithme a les propriétés suivantes.*

(a) $\log_a a^m = m$ *si* $m \in \mathbb{N}$ *;*

(b) $\log_a a^r = r$ *si* $r \in \mathbb{R}$ *;*

(c) $\log_a 1 = 0$ *;*

(d) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ *;*

(e) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ *;*

(f) $\log_a M^k = k \log_a M$ *;*

(g) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ *;*

(h) $a^{\log_a M} = M$.

Voici un exemple utilisant la majorité des propriétés du théorème précédent.

Exemple 6.3

Utiliser les propriétés du théorème précédent afin de calculer $(\log_2 81)(\log_3 8)$. △

Deux bases sont importantes à se rappeler : e et 10. Ces bases ont leur propre notation : $\log_e x := \ln x$ et $\log_{10} x := \log x$.

6.2 Dérivée de la fonction exponentielle

Théorème 6.2. *Soit une fonction f dérivable sur tout son domaine et $a > 0$ et $a \neq 1$.*

(a) Si $H(x) = a^x$, alors $H'(x) = (\ln a)\, a^x$.

(b) Si $H(f(x)) = a^{f(x)}$, alors $H'(x) = (\ln a)\, a^{f(x)} f'(x)$.

Exemple 6.4

Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{4^x}{x^4}.$$

△

Exemple 6.5

Calculer la dérivée de

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(5^x - x^5)}.$$

△

Lemme 6.1. *Si $a > 0$ et $a \neq 1$, alors*

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

Remarque 6.1

La base népérienne e est définie formellement comme $e := \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$. ▼

Corollaire 6.1. *Soit f une fonction dérivable sur tout son domaine.*

(a) Si $H(x) = e^x$, alors $H'(x) = e^x$.

(b) Si $H(x) = e^{f(x)}$, alors $H'(x) = e^{f(x)} f'(x)$.

Exemple 6.6

Calculer la dérivée de $f(x) = x^2 e^x$. △

Exemple 6.7

Calculer la dérivée de $v(t) = \sqrt{e^{5t^2}}$. △

6.3 Dérivée de la fonction logarithmique

Théorème 6.3. *Soit f une fonction dérivable sur tout son domaine.*

(a) Si $H(x) = \ln x$, alors $H'(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) Si $H(f(x)) = \ln f(x)$, alors $H'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Théorème 6.4. *Soit f une fonction dérivable sur tout son domaine et $a > 0$ ($a \neq 1$).*

(a) Si $H(x) = \log_a x$, alors $H'(x) = \dfrac{1}{(\ln a)\, x}$.

(b) Si $H(x) = \log_a f(x)$, alors $H'(x) = \dfrac{f'(x)}{(\ln a)\, f(x)}$.

Voici quelques exemples.

Exemple 6.8

Calculer $\omega(x)$ si $\omega(x) = e^x \ln x$. △

Exemple 6.9

Calculer y' si $y = \log_8(x^3 - e^x + 10x)$. △

Dérivation logarithmique

Dans certains cas, on recherche la dérivée d'expressions de la forme $y = x^x$, $y = [\ln(26x + 5)]^{e^x}$ ou plus généralement $y = f(x)^{g(x)}$. La manière de procéder est la suivante.

1. Prendre le logarithme népérien (le ln) de chaque côté de l'équation.
2. Dériver chaque côté de l'équation en fonction de la variable dépendante.
3. Rassembler ensemble les termes comportant la dérivée première et isoler la dérivée.

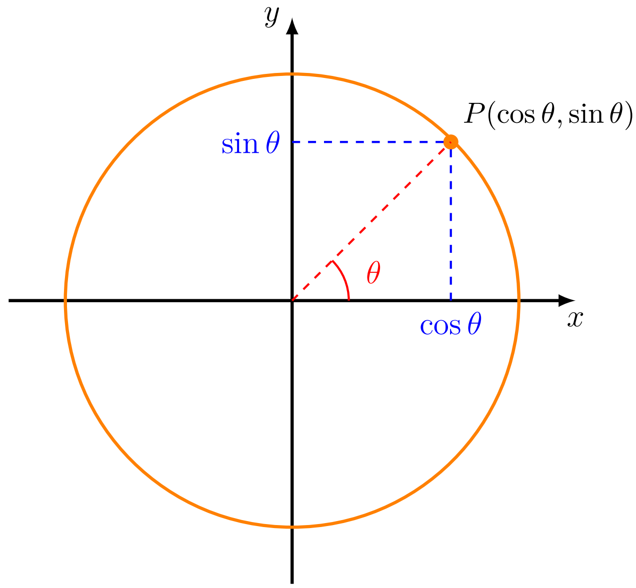
Exemple 6.10

Dériver l'expression $y = x^x$. △

Exemple 6.11

Dériver l'expression $y = 4^{x^x}$. △

6.4 Rappels sur les fonctions trigonométriques de base



Les fonctions sinus (sin) et cosinus (cos) sont définies comme l'abscisse et l'ordonnée du point P sur le cercle unité ($x^2 + y^2 = 1$) représenté sur la figure suivante.

Le domaine et l'image de la fonction **sinus** (définie en abrégé par $g(x) = \sin x$) sont $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ et $\operatorname{Ima} g = [-1, 1]$. Cette fonction satisfait l'égalité suivante : $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$. Ceci veut dire que la fonction sinus est 2π-périodique. La fonction sin s'annule lorsque $x \in \{\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$, c'est-à-dire tous les x de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le domaine et l'image de la fonction **cosinus** (définie en abrégé par $f(x) = \cos x$) sont $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ et $\operatorname{Ima} f = [-1, 1]$. Cette fonction satisfait l'égalité suivante : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$. Ceci veut dire que la fonction cosinus est aussi 2π-périodique. La fonction cos s'annule lorsque $x \in \left\{\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$, c'est-à-dire tous les x de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On définit ensuite les fonctions **tangente**, **cotangente**, **sécante** et **cosécante** des façons suivantes (voir page 48 du manuel de référence) :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{et} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

TABLE 1 – Caractéristiques des fonctions trigonométriques

Fonctions	**Domaine**	**Image**	**période**
sin	$\operatorname{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$	$\operatorname{Ima}(\sin) = [-1, 1]$	2π
cos	$\operatorname{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$	$\operatorname{Ima}(\cos) = [-1, 1]$	2π
tan	$\operatorname{Dom}(\tan) = \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\}$	$\operatorname{Ima}(\tan) = \mathbb{R}$	π
cot	$\operatorname{Dom}(\cot) = \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$	$\operatorname{Ima}(\cot) = \mathbb{R}$	π
sec	$\operatorname{Dom}(\sec) = \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\}$	$\operatorname{Ima}(\sec) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	2π
csc	$\operatorname{Dom}(\csc) = \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$	$\operatorname{Ima}(\csc) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	2π

Le théorème suivant expose certaines identités qui lient les fonctions trigonométriques entre elles.

Théorème 6.5 (Identités trigonométriques). *Les équations suivantes sont toujours vérifiées :*

(a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

(b) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$;

(c) $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$;

(d) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;

(e) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$;

(f) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$;

(g) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$;

(h) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.

(i) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$;

(j) $\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$;

(k) $\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2(A)$;

(l) $\tan(2A) = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$.

L'argument des fonctions trigonométriques est donné en radians (rad.) dans de nombreuses situations. Voici le lien entre les radians (r) et les degrés (d) :

$$\frac{d^\circ}{360^\circ} = \frac{r\ rad.}{2\pi\ rad.}.$$

Un radian est ____

____

____

6.5 Dérivée des fonctions sin et cos

Théorème 6.6. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable partout sur son domaine.*

(a) *Si $H(x) = \sin x$, alors $H'(x) = \cos x$.*

(b) *Si $H(x) = \sin f(x)$, alors $H'(x) = f'(x) \cos f(x)$.*

Théorème 6.7. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable partout sur son domaine.*

(a) *Si $H(x) = \cos x$, alors $H'(x) = -\sin x$.*

(b) *Si $H(x) = \cos f(x)$, alors $H'(x) = -f'(x) \sin f(x)$.*

Exemple 6.12

Calculer f' si $f(x) = \cos(x^2) \sin x$ △

Exemple 6.13

Calculer h' si $h(\delta) = \left[\cos(\delta^2 - e^\delta)\right]^7$. △

6.6 Dérivées des fonctions tan, cot, sec et csc

Théorème 6.8. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable partout sur son domaine.*

(a) Si $H(x) = \tan x$, alors $H'(x) = \sec^2 x$.

(b) Si $H(x) = \tan f(x)$, alors $H'(x) = f'(x) \sec^2 f(x)$.

Théorème 6.9. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable partout sur son domaine.*

(a) Si $H(x) = \cot x$, alors $H'(x) = -\csc^2 x$.

(b) Si $H(x) = \cot f(x)$, alors $H'(x) = -f'(x) \csc^2 f(x)$.

Exemple 6.14

Calculer $g'(w)$ si $g(w) = \tan(\sqrt{w} + e^w)$. △

Exemple 6.15

Calculer v' si $v = \cot(t^e + e^t)$. △

Les dérivées de fonctions sec et csc se retrouvent dans les deux derniers théorèmes de cette section.

Théorème 6.10. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable partout sur son domaine.*

(a) Si $H(x) = \sec x$, alors $H'(x) = \sec x \tan x$.

(b) Si $H(x) = \sec f(x)$, alors $H'(x) = f'(x) \sec f(x) \tan f(x)$.

Théorème 6.11. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable partout sur son domaine.*

(a) Si $H(x) = \csc x$, alors $H'(x) = -\csc x \cot x$.

(b) Si $H(x) = \csc f(x)$, alors $H'(x) = -f'(x) \csc f(x) \cot f(x)$.

Exemple 6.16

Calculer $f'(x)$ si $f(x) = \csc^7 x$. △

Exemple 6.17

Calculer $h'(\delta)$ si $h(\delta) = \sqrt{\sec(\sin^2 \delta)}$. △

6.7 Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

Les fonctions trigonométriques inverses sont définies de la façon suivante

$$y = \operatorname{Arc}\cos x \iff \cos y = x, \qquad y = \operatorname{Arc}\sin x \iff \sin y = x, \qquad y = \operatorname{Arc}\tan x \iff \tan y = x$$

$$y = \operatorname{Arc}\sec x \iff \sec y = x, \qquad y = \operatorname{Arc}\csc x \iff \csc y = x, \qquad y = \operatorname{Arc}\cot x \iff \cot y = x.$$

Il s'agit des fonctions inverses des fonctions trigonométriques, c'est-à-dire que

$$\operatorname{Arc}\cos\left(\cos(x)\right) = \cos(\operatorname{Arc}\cos x) = x, \qquad \operatorname{Arc}\sin\left(\sin x\right) = \sin(\operatorname{Arc}\sin x) = x,$$

$$\operatorname{Arc}\sec\left(\sec x\right) = \sec(\operatorname{Arc}\sec x) = x, \qquad \operatorname{Arc}\csc\left(\csc x\right) = \csc(\operatorname{Arc}\csc x) = x,$$

$$\operatorname{Arc}\tan\left(\tan x\right) = \tan(\operatorname{Arc}\tan x) = x, \qquad \operatorname{Arc}\cot\left(\cot x\right) = \cot(\operatorname{Arc}\cot x) = x.$$

Le théorème suivant donne la dérivée de la fonction $\operatorname{Arc}\cos$.

Théorème 6.12 (des dérivées de $\operatorname{Arc}\cos$). *Soit $f(x)$ une fonction dérivable.*

(a) Si $H(x) = \operatorname{Arc}\cos x$, alors $H'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) Si $H(x) = \operatorname{Arc}\cos f(x)$, alors $H'(x) = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$.

Le théorème suivant donne la dérivée de la fonction $\operatorname{Arc}\sin$.

Théorème 6.13 (de la dérivée de $\operatorname{Arc}\sin$). *Soit $f(x)$ une fonction dérivable.*

(a) Si $H(x) = \operatorname{Arc}\sin x$, alors $H'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) Si $H(x) = \operatorname{Arc}\sin f(x)$, alors $H'(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$.

Le théorème suivant donne les dérivées des fonctions $\operatorname{Arc}\sec$ et $\operatorname{Arc}\csc$.

Théorème 6.14 (des dérivées de Arc sec, Arc csc). *Soit $f(x)$ une fonction dérivable.*

(a) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,sec} x$*, alors* $H'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(b) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,sec} f(x)$*, alors* $H'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)\sqrt{(f(x))^2-1}}$.

(c) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,csc} x$*, alors* $H'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(d) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,csc} x$*, alors* $H'(x) = \dfrac{-1}{f(x)\sqrt{(f(x))^2-1}}$.

Le théorème suivant donne les dérivées des fonctions $\operatorname{Arc\,tan}$ et $\operatorname{Arc\,cot}$.

Théorème 6.15 (des dérivées de Arc tan, Arc cot). *Soit $f(x)$ une fonction dérivable.*

(a) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,tan} x$*, alors* $H'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(b) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,tan} f(x)$*, alors* $H'(x) = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$.

(c) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,cot} x$*, alors* $H'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

(d) Si $H(x) = \operatorname{Arc\,cot} f(x)$*, alors* $H'(x) = \dfrac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}$.

6.8 Exemples supplémentaires

Exemple 6.18

Calculer la dérivée de $f(x) = 5^x$. △

Exemple 6.19

Calculer la dérivée de $f(x) = 5^{x^2}$. △

Exemple 6.20

Calculer la dérivée de $H(x) = x^2 e^{x^2}$. △

Exemple 6.21

Calculer la dérivée de $y = e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}$. △

Exemple 6.22

Calculer $f'(x)$ si $f(x) = x^2 \ln x$. △

Exemple 6.23

Calculer $v'(t)$ si $v(t) = \ln(1 - t^2 + t^5)$. △

Exemple 6.24

Calculer $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}\tan x$. △

Exemple 6.25

Calculer $h'(\delta)$ si $h(\delta) = e^\delta \cot\delta$. △

Exemple 6.26

Calculer $g'(w)$ si $g(w) = e^{-w} \sec^2 w$. △

Exemple 6.27

Calculer v' si $v = \left(\csc \sqrt{t}\right)^{1/3}$. △

Exemple 6.28

Calculer $y'(x)$ si $y(x) = \operatorname{Arc\,tan}(1 + \sqrt{x} + x^5)$. △

Exemple 6.29

Calculer $h'(y)$ si $h(y) = \operatorname{Arc\,tan}(y^2) \sin(1-x^2)$. △

6.9 Exercices

Je vous conseille de faire les exercices du chapitre 1 avant de commencer les exercices des chapitres 8 et 9. Vous aurez besoin du cercle trigonométrique fournit sur le portail de cours.

Section 1.9 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.

Les exercices liés à ce cours se retrouvent aux chapitre 8 et 9 (précisément à partir de la page 346) du livre de référence. Les numéros suivis du mot *défi* ne sont pas obligatoires.

Section 8.1 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 (défi) ; 9 (défi) ; 10 (défi) ; 11 (défi). Remarque pour 6 b) : parallèle à l'axe des x signifie la pente nulle.

Exercices récapitulatifs chap. 8 : 1 ; 2 ; 3 (défi) ; 5 a) (défi). Ne pas faire les numéros en rouge.

Section 9.1 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 a) ; 5 ; 6 (défi). Ne faites pas 5 c) et d).

Section 9.2 : 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Exercices récapitulatifs chap. 9 : 1 ; 2 ; 3 (défi) ; 5 a).

Sections 10.1, 10.2 et 10.3 : 1.