MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 5

Notes de cours

Table des matières

5.1 Dérivée d'une composition de fonctions

Rappel.

Si f et g sont deux fonctions avec $\operatorname{Ima} f \subseteq \operatorname{Dom} g$, alors la fonction composée $g \circ f$ est définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$.

Théorème 5.1 (de la règle de la chaîne). *Soit f et g deux fonctions dérivables avec $\operatorname{Ima} f \subseteq \operatorname{Dom} g$. Si $H(x) = (g \circ f)(x)$, alors*

$$H'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

En posant $g(x) = x^r$ où $r \in \mathbb{R}$, alors on a le résultat suivant.

Corollaire 5.1. *Soit f une fonction dérivable et $r \in \mathbb{R}$. Si $H(x) = [f(x)]^r$, alors*

$$H'(x) = r\,[f(x)]^{r-1}\,f'(x).$$

Notation de Leibniz.

La notation de Leibniz permet d'écrire la règle de la chaîne d'une manière efficace pour différents problèmes. Avec cette notation, si on pose $u = y(x)$, alors la règle de la chaîne s'exprime par

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

Exemple 5.1

Calculer la dérivée de $H(x) = \sqrt{x^7 - 2x + 1}$. △

Exemple 5.2

Calculer la dérivée de $g(x) = \dfrac{3}{(x^5+7)^4}$. △

Exemple 5.3

Calculer la dérivée de $h(x) = u^3$ où $u(x) = \dfrac{x^2}{2 - x^3}$. △

Exemple 5.4

Calculer la dérivée de $x(t) = \sqrt{\dfrac{mt}{1+t}}$. △

5.2 Dérivation implicite

Depuis le début du cours, nous traitons des expressions sous la **forme explicite**, c'est-à-dire qu'il existe une relation directe entre la variable indépendante et la variable dépendante du type $y = f(x)$.

Cependant, certaines situations imposent d'autres types de relations dans lesquelles aucune expression du type $y = f(x)$ ne peut être trouvée. C'est ce qu'on appelle **expression de la forme implicite**.

Définition 5.1 (d'une forme implicite). *Une équation (ou expression) de la forme $G(x, y) = F(x, y)$ où aucune variable ne peut être isolée individuellement est appelée une équation (ou expression) de forme implicite.*

Exemple 5.5

$x^2 + y^2 = 1$ △

Exemple 5.6

$t^2 + v^5 t^5 - \dfrac{v}{t} = v^2 + 25$ △

Exemple 5.7

$\sqrt{t} + x^2 = xt$ △

Exemple 5.8

$3x^3 y - 4y^2 = 5x^2 y^4 - 7$ △

Dans certains cas, une forme implicite peut fournir plusieurs fonctions. L'exemple 5.5 illustre ce genre de situation. En effet, si on isole y en fonction de x, on obtient

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

si $-1 \leq x \leq 1$. On obtient donc deux fonctions $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Cependant, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ réunies ensembles ne forment pas une fonction (par le test de la droite verticale).

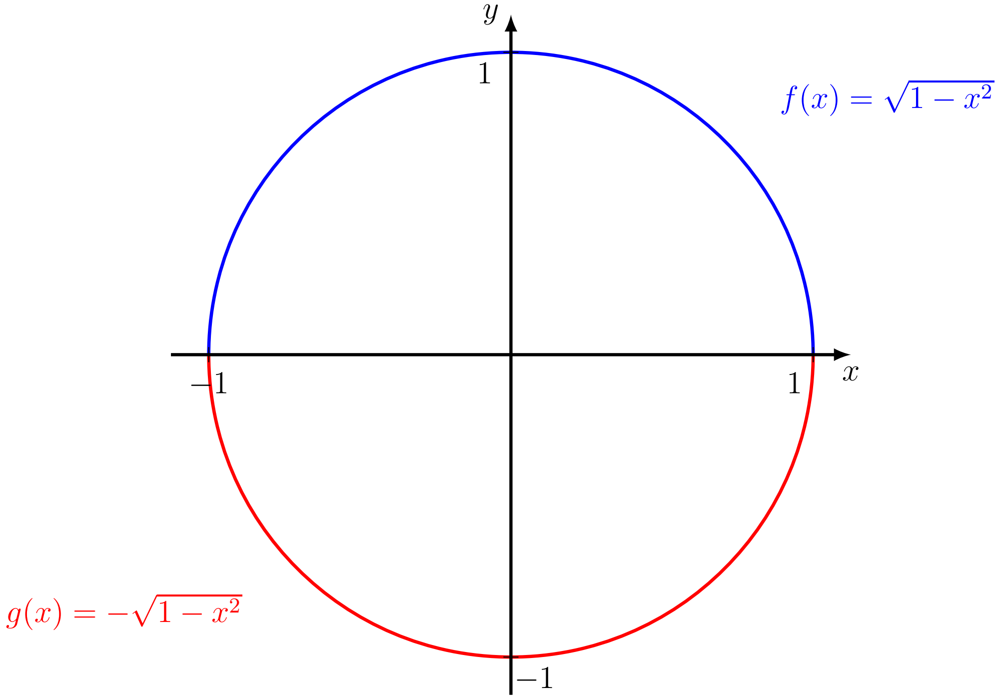

FIGURE 1 – Représentation du cercle par la forme implicite $x^2 + y^2 = 1$

Dérivation implicite

Dans une équation de forme implicite, on veut parfois chercher la dérivée d'une variable dépendante d'une autre (par exemple $y = y(x)$). Pour ce faire, on suit les trois étapes suivantes :

(1) On dérive de chaque côté de l'équation par rapport à la variable indépendante.

(2) On regroupe du même côté les expressions comportant la dérivée première de la variable dépendante.

(3) On met en évidence le facteur de la dérivée et on l'isole.

Exemple 5.9

Déterminer la dérivée $\dfrac{du}{dx}$ si

$$x^2 + u^2 = 9.$$

△

Exemple 5.10

Déterminer la dérivée $\dfrac{dz}{dt}$ si

$$t^3 + z^3 - t^2 z^4 = 5t + z^2 - 8.$$

△

Exemple 5.11

Déterminer la dérivée y' si

$$x^3 + y^3 = 9x + \sqrt{y^3}.$$

△

Exemple 5.12

(No. 26 p.210) Déterminer la dérivée $\dfrac{dt}{ds}$ si

$$s^2 + t^2 = \sqrt{s^2 + t^2} - t.$$

△

5.3 Exercices

Les exercices se retrouvent au chapitre 4 du livre de référence du cours.

Section 4.3 : 1 ; 2 ; 3 ; 6.

Section 4.4 : 1 ; 8 ; 9.

Exercices récapitulatifs : 3 b) à i), k), l) ; 5 ; 6 ; 9.

Des défis : p.207 no. 17 ; p.209 no. 17 ; p.210 no. 22.