MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 4

Notes de cours

Table des matières

4.1 Dérivées des fonctions constante, identité et puissance

Définition 4.1 (de l'identité). *La fonction identité est la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = x.$$

Théorème 4.1. *Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante et $r \in \mathbb{R}$ un nombre réel.*

(a) Si $f(x) = k$, alors $f'(x) = 0$.

(b) Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.

(c) Si $f(x) = x^r$ pour $x \geq 0$, alors $f'(x) = rx^{r-1}$.

(d) Si $H(x) = kf(x)$ et f est une fonction dérivable, alors $H'(x) = kf'(x)$.

Exemple 4.1

Calculer la dérivée de $f(x) = 5$. △

Exemple 4.2

Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt[3]{x}$. △

Exemple 4.3

Calculer la dérivée de $f(x) = 2x^{25}$. △

Exemple 4.4

Calculer la dérivée de $f(x) = 2x^{-5/2}$. △

4.2 Dérivées d'un(e) somme, produit et quotient de fonctions

Nous allons voir quelques théorèmes qui nous permettent de dériver des expressions algébriques « facilement ».

Théorème 4.2 (**de la dérivée d'une somme**). *Soit f et g deux fonctions dérivables et $n \in \mathbb{N}^*$.*

(a) Si $H(x) = f(x) + g(x)$, alors $H'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(b) Si $H(x) = f(x) - g(x)$, alors $H'(x) = f'(x) - g'(x)$.

(c) Si $H(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ et chaque f_i est dérivable, alors

$$H'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Théorème 4.3 (**de la dérivée d'un produit**). *Soit f et g deux fonctions dérivables et $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Si $H(x) = f(x)g(x)$, alors $H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(b) Si $H(x) = f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$ et chaque f_i est dérivable, alors

$$\begin{aligned} H'(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} f_i(x) \right) \\ &= f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + \ldots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x). \end{aligned}$$

Remarque 4.1

Le symbole $\sum$ signifie « somme ». Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ signifie de faire la somme $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)$.

Le symbole $\prod$ signifie « produit ». Ainsi, $\displaystyle\prod_{i=1, i\neq k}^{n} f_i$ signifie de faire le produit $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$ en omettant la fonction $f_k(x)$. ▼

Théorème 4.4 (de la dérivée d'un quotient). *Soit deux fonctions f et g dérivables avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} g$.*

(a) Si $H(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, *alors* $H'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

(b) Si $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *alors* $H'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Dans les exemples suivants, tenter de calculer la dérivée de chacune des fonctions données.

Exemple 4.5

$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x$ $\triangle$

Exemple 4.6

$g(x) = 5x + 3x\sqrt{x}$ $\triangle$

Exemple 4.7

$y = \dfrac{1}{x^7 - 1} - \dfrac{9}{1 - x^2}$ $\triangle$

Exemple 4.8

$w(x) = \dfrac{-4}{x}\left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{5}{x^3}\right)$ $\triangle$

Exemple 4.9

$h(x) = (x^2 + 5)x^5(5x^2 - 26)$ $\triangle$

Exemple 4.10

$j(x) = \dfrac{5x^3}{5x^2 + 25}$ $\triangle$

Exemple 4.11

$x(t) = (\sqrt{t} - 1)(t^{2/3} + 3)$ $\triangle$

Exemple 4.12

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{\sqrt[5]{x}}{8}\right)$ $\triangle$

4.3 Dérivées successives

Dans diverses disciplines scientifiques ou générales (comme l'économie), on veut étudier non seulement la dérivée d'une fonction, mais aussi ses dérivées d'ordres supérieures.

Prenons un exemple tiré de la physique. Si un objet se déplace et sa position est donnée par une fonction $x(t)$ qui dépend du temps, alors on définit la vitesse de l'objet par l'expression suivante

$$v(t) := x'(t).$$

Donc, la vitesse est la dérivée de la fonction position de l'objet (le TVI à l'instant t).

Maintenant, si notre objet subit une variation de vitesse (par exemple une accélération à un feu de signalisation), alors nous voudrions connaître cette variation qui est nommée l'accélération. On définit l'accélération par l'expression suivante

$$a(t) := v'(t) = x''(t).$$

Donc, l'accélération d'un objet à un temps donné est la dérivée de la vitesse (le TVI de la vitesse à l'instant t) ou la dérivée seconde de la fonction position.

Définition 4.2 (**des dérivées successives**). *La dérivée de premier ordre est le taux de variation instantané de la fonction f en x, c'est-à-dire la dérivée de la fonction f. La dérivée du second ordre est le taux de variation instantané de la dérivée du premier ordre en x, c'est-à-dire*

$$f''(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

De façon générale, la dérivée d'ordre n où $n \in \mathbb{N}^*$ est le taux de variation instantanée de la dérivée d'ordre $n-1$, c'est-à-dire

$$f^{(n)}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}.$$

Autres notations.

La dérivée d'ordre n se note de différentes façons :

$$y^{(n)}, \qquad f^{(n)}, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{ou} \quad D^n f.$$

Exemple 4.13

$f(x) = x^4$, calculer $f^{(4)}(x)$. △

Exemple 4.14

$u(b) = \dfrac{1}{1-b}$, calculer $\dfrac{d^4 u}{db^4}$. △

4.4 Exercices

Les exercices se retrouvent au chapitre 4 du livre de référence du cours.

Section 4.1 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Section 4.2 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9.

Section 4.3 : 5 ; 6 ; 7 sauf d).