MPU1051 : Calcul différentiel

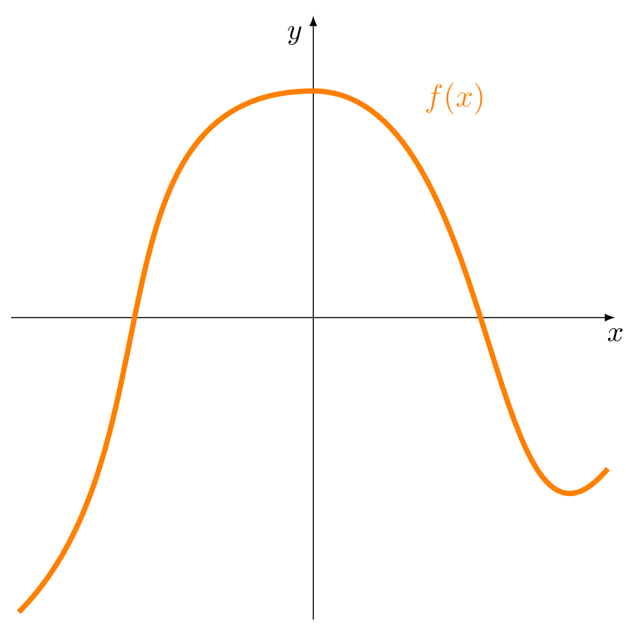
Cours 3

Notes de cours

Table des matières

3.1 Continuité

Intuition. Une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon.



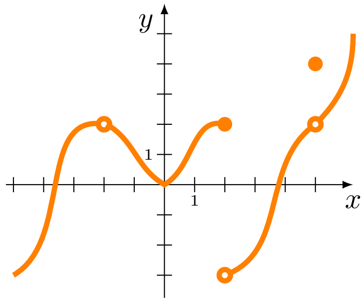
Plus formellement, on a la définition suivante de la continuité.

Définition 3.1. *Soit f une fonction. Elle est continue au point $x = a$ si et seulement si*

(a) $a \in \mathrm{Dom}\, f$; *(b)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe ;* *(c)* $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Exemple 3.1

Soit la fonction représentée par



△

Exemple 3.2

Soit la fonction par parties suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 7 - x & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

△

Définition 3.2. *Une fonction f est dite continue, si elle est continue en chaque point de son domaine.*

Voici quelques exemples de fonctions continues :

(i) $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante ;

(ii) $f(x) = x^r$ où $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la fonction polynomiale $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$;

(iii) $H(x) = (f(x))^r$ où f est une fonction continue.

Si le domaine de la fonction f est un certain type (ouvert ou fermé) d'intervalles ou on veut étudier la continuité sur un intervalle, alors on doit être plus pointilleux sur les extrémités des intervalles.

Définition 3.3. *Soit une fonction f définie sur un certain type d'intervalle.*

(a) Elle est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si elle est continue en chaque point $x \in]a, b[$.

(b) Elle est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si

(i) f est continue sur l'intervalle $]a, b[$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;

(iii) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Une fonction continue a quelques propriétés intéressantes.

Théorème 3.1 (des valeurs intermédiaires). *Soit f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et L un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = L$.*

Corollaire 3.1. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un nombre c tel que $f(c) = 0$.*

Exemple 3.3

Déterminer si la fonction

$$f(x) = \frac{-x^5 + 4x + 130}{x^2 + 2}$$

est continue sur l'intervalle $[0, 4]$. Utiliser le corollaire 3.1 pour montrer que $f(x)$ a un zéro dans l'intervalle $[0, 4]$. $\triangle$

3.2 Taux de variation moyen

Un taux de variation est un effet de changement croissant ou décroissant :

- si l'effet est positif, alors il y a croissance ;
- si l'effet est négatif, alors il y a décroissance.

On aura besoin de la définition de la sécante à une courbe.

Définition 3.4 (de sécante). *Une droite qui coupe en un point ou plusieurs points une courbe est appelée une **sécante** à la courbe.*

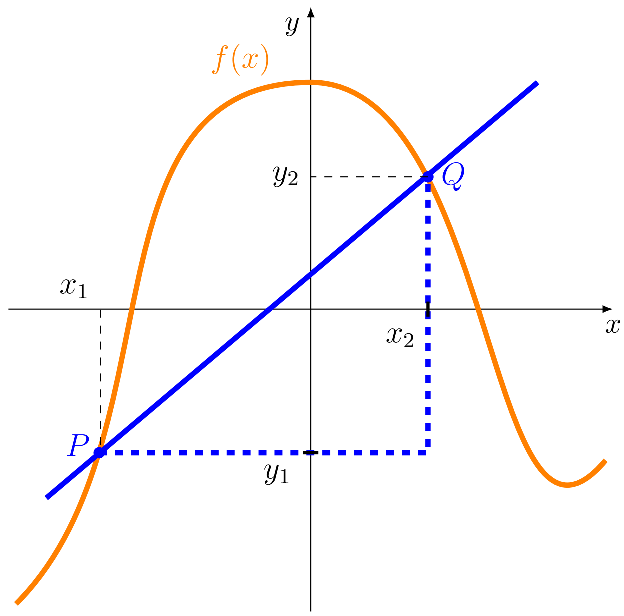
Remarque 3.1

Si $P = (x_1, y_1)$ et $Q = (x_2, y_2)$ sont deux points de la courbe par lesquels la sécante passe, alors la pente de la sécante est

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

L'équation de la sécante est

$$y = m \cdot x + b.$$



▼

> **Définition 3.5.** *Si* $[x_1, x_2] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ *et* $x_1 < x_2$*, alors le taux de variation moyen de la fonction sur l'intervalle* $[x_1, x_2]$ *est défini par*
>
> $$TVM := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Remarque 3.2

Le TVM est la pente de la sécante passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. ▼

Autres Notations.

(1) En termes de variation en x et y. On définit

  (a) la **variation de x** par $\Delta x := x_2 - x_1$;

  (b) la **variation de y** par $\Delta y := y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$.

  Ainsi, le TVM devient

$$TVM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(2) Sur un intervalle $[x_1, x_2] = [x, x+h]$ avec $h > 0$. Dans ce cas

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h, \qquad \Delta y = f(x+h) - f(x) \quad \text{et} \quad TVM = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemple 3.4

Soit $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$ et

$$f(x) = 3x^2 - 5.$$

Calculer Δy et le $TVM_{[2,5]}$. Aussi, calculer TVM pour $x_1 = x$ et $x_2 = x + \Delta x$. Interpréter. $\triangle$

3.3 La dérivée

Définition 3.6 (de la dérivée). *La dérivée d'une fonction f au point $x = a$ est la limite des pentes des sécantes passant par les points $(a, f(a))$ et un point $(a+h, f(a+h))$ voisin de $(a, f(a))$ ($h < 0$ ou $h > 0$). Précisément, la dérivée de la fonction f au point $x = a$, notée $f'(a)$ est la limite suivante*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On dit que f est dérivable en $x = a$ si la limite précédente existe.

Représentation graphique de la dérivée :

Autres notations.

On note aussi la limite de la définition précédente comme ceci :

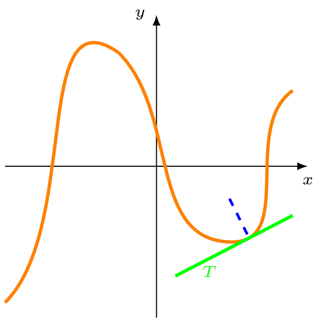
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Remarque 3.3

Le nombre $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe au point $(a, f(a))$. ▼

Définition 3.7 (de tangente). *La tangente à une courbe est l'unique droite T touchant perpendiculairement la courbe de la fonction au point $(a, f(a))$.*

Remarque 3.4



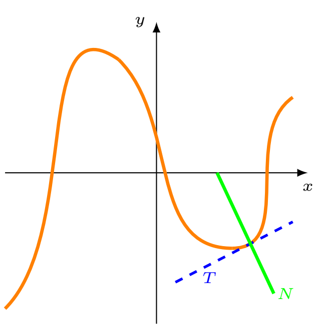
L'équation de la droite tangente au point $(a, f(a))$ est

$$y = f'(a) \cdot x + b$$

lorsque la dérivée existe au point $x = a$. Le nombre b est déterminé en posant $y = f(a)$ et $x = a$ dans l'équation et en l'isolant. ▼

Définition 3.8 (de normale). *La normale à une courbe est l'unique droite N perpendiculaire à la tangente T de la courbe de la fonction au point $(a, f(a))$.*

Remarque 3.5



L'équation de la droite Normale au point $(a, f(a))$ est

$$y = -\frac{1}{f'(a)} \cdot x + b'$$

lorsque la dérivée existe au point $x = a$. Le nombre b' est déterminé en posant $y = f(a)$ et $x = a$ dans l'équation et en l'isolant. ▼

Voici un exemple de calcul de la dérivée et de son application afin de trouver la droite tangente en un point d'une courbe.

Exemple 3.5

Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{x+3}.$$

Déterminer $f'(2)$, la droite tangente T au point $a = 2$ et la droite normale N au point $a = 2$. $\triangle$

Dans certaines situations, il est important de savoir, à un instant donné (ou un endroit donné), quel est le taux de variation de la fonction.

Définition 3.9. *Le* ***taux de variation instantané*** *d'une fonction au point* $(a, f(a))$ *est*

$$TVI := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 3.6

Un bonhomme de neige fond (habituellement) lentement au mois de janvier. On dit que le rayon, en centimètres (cm), de son corps est donné en fonction du temps (en minutes) par $r(t) = \dfrac{32}{t+2}$ et $t \geq 0$.

(a) Calculer le TVM sur l'intervalle $[2, 6]$.

(b) Calculer le TVI au point $(2, r(2))$. Interpréter.

(c) Calculer la $\lim\limits_{t \to \infty} r(t)$. Interpréter.

$\triangle$

Définition 3.10 (de la fonction dérivée). *De façon générale, la fonction dérivée* f' *est définie par*

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lorsque cette dernière limite existe.

Autres Notations.

D'abord, la fonction dérivée est notée de différentes façons. On peut écrire

$$f'(x), \qquad y', \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{df}{dx} \qquad \text{ou} \qquad D_x f.$$

Puis, on note l'évaluation de la fonction dérivée en un nombre $x = a$ par

$$f'(a), \qquad y'\Big|_{x=a}, \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}, \qquad \frac{df}{dx}\Big|_{x=a} \quad \text{ou} \quad D_{x=a}f.$$

C'est **Leibniz**, un des fondateurs du calcul différentiel et intégral, qui a inventé cette notation.

Exemple 3.7

Soit la fonction

$$f(x) = -x^2 + 1.$$

Calculer f' et trouver le nombre c tel que la pente de la tangente T est nulle. △

On termine le cours avec un petit théorème.

Théorème 3.2. *Si une fonction f est dérivable en $x = a$, alors elle est continue en $x = a$. Ainsi, si une fonction est dérivable sur tout son domaine, alors la fonction f est continue.*

3.4 Exercices

Les exercices se retrouvent aux chapitres 2 et 3 du livre de référence du cours.

Section 2.4 : 1 a) ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 a) ; 7.

Exercices récapitulatifs chap. 2 : 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 28.

Section 3.1 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5c) (les indices donnent l'intervalle sur lequel le TVM doit être calculé) ; 6 (même commentaire que l'exercice précédent) ; 8.

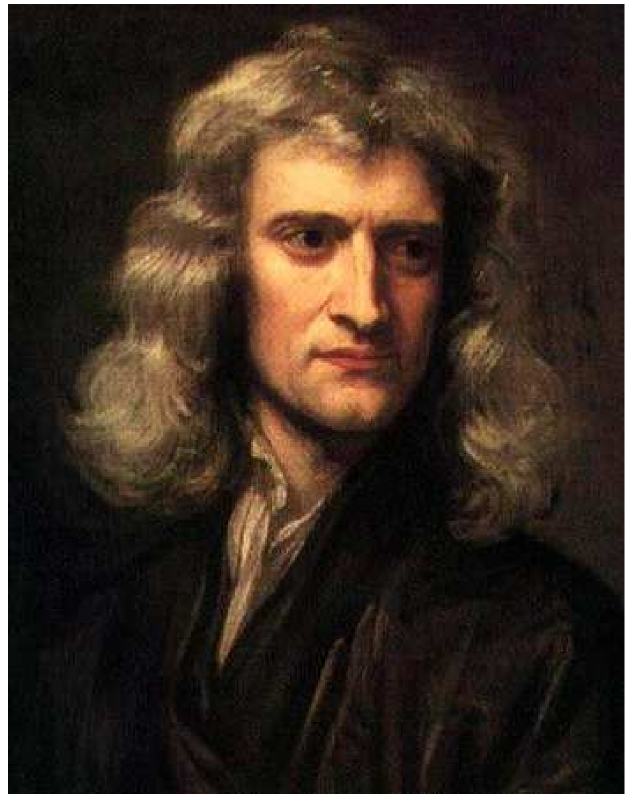
Section 3.2 : 1 ; 2 (l'indice indique le point où calculer le TVI) ; 3.

Section 3.3 : 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Ces figures sont tirées du site

`http://www.math.uqam.ca/~maheuxjf/cours/doc865n/HistoireMath/xvii.html`

(a) Gottfried Leibniz (1646-1716)



(b) Isaac Newton (1642-1727)

FIGURE 1 – Les plus reconnus pour leurs contributions aux Calculs Différentiel et Intégral