MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 2

Notes de cours

Table des matières

2.1 Notions de limite

Définition 2.1 (de limite). *Soit une fonction f. Elle a une limite, notée L, au point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, on dit que la limite existe au point $x = a$ et cette limite est notée $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Explications des notations.

(1) $x \to a^-$ signifie que x tend vers le nombre a par la gauche. Autrement dit, x prend des valeurs de plus en plus près de a et demeurant inférieures à (et différentes de) a. Ainsi, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ est la **limite à gauche**.

(2) $x \to a^+$ signifie que x tend vers le nombre a par la droite. Autrement dit, x prend des valeurs de plus en plus près de a et demeurant supérieures à (et différentes de) a. Ainsi, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ est la **limite à droite**.

(3) $x \to a$ signifie que x tend vers le nombre a soit par la droite ou par la gauche. Dans ce cas, on dit aussi que x est **voisin** de a et $x \neq a$.

Remarque : le point a n'est pas obligatoirement dans le domaine de la fonction f. Afin de calculer une limite, il suffit que la fonction soit définie sur deux intervalles du type (x_1, a) et (a, x_2).

Illustration graphique de la limite :

Exemple 2.1

Déterminer expérimentalement la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$ lorsque $x \to 3$. △

Voici quelques théorèmes utiles pour l'évaluation de limites de fonctions. Ceux-ci évitent de devoir, à chaque fois, calculer la limite expérimentalement.

Théorème 2.1. *Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante et $f(x) = x$ la fonction identité. Dans ce cas, on a*

$$\lim_{x \to a} k = k \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} x = a.$$

Théorème 2.2. *Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante.*

(a) La limite d'une somme de deux fonctions est la somme des limites, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M.$$

(b) La limite d'un produit d'une constante par une fonction est le produit de la constante par la limite, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot L.$$

(c) La limite d'une différence de deux fonctions est la différence des limites, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M.$$

Théorème 2.3. *Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante.*

(a) La limite d'un produit de deux fonctions est le produit des limites, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L \cdot M.$$

(b) Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \operatorname{Dom} g$ et $M \neq 0$, alors la limite d'un quotient de deux fonctions est le quotient des limites, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Remarque 2.1

Lorsque $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, on obtient une division par zéro, c'est-à-dire une forme $\frac{L}{0}$. Ceci mène aux concepts d'indéterminations et d'asymptotes abordés aux sections subséquentes. ▼

Exemple 2.2

Calculer $\lim_{x\to 4}(x-7)$. △

Exemple 2.3

Calculer $\lim_{x\to -1}\frac{3x(x-1)}{2x+1}$. △

Théorème 2.4. *Supposons que* $\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$ *pour* $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$.

(a) La limite de la somme d'un certain nombre de fonctions est la sommes des limites, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right) &= \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\ldots+\lim_{x\to a} f_n(x)\\ &= L_1+L_2+\ldots+L_n.\end{aligned}$$

(b) La limite d'un produit d'un certain nombre de fonctions est le produit des limites, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right) &= \left(\lim_{x\to a} f_1(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} f_1(x)\right)\cdot\ldots\cdot\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)\\ &= L_1\cdot L_2\ldots\cdot L_n\end{aligned}$$

En réunissant les théorèmes 2.2(b) et 2.4, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.1. *Soit* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *un polynôme de degré* $n \in \mathbb{N}$. *Dans ce cas,*

$$\lim_{x\to c} P(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

Exemple 2.4

Calculer $\lim_{x\to 5} 5x^4+4x^2+18x+5$. △

Exemple 2.5

Calculer $\lim_{x\to 1}\frac{(5x^2+1)(x+3)(x+1)}{x}$. △

Théorème 2.5. *Soit f une fonction telle que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(a) Si $n\in\mathbb{N}^*$, *alors* $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$.

(b) Si $r>0$ *et* $[f(x)]^r$ *est bien définie, alors*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^r = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^r.$$

Exemple 2.6

Calculer $\lim_{x\to 1}\left[\sqrt[8]{(2x^4-1)^7}+x^2\right]^3$. △

Exemple 2.7

Calculer $\lim_{x\to 3}\sqrt[4]{x-3}$. △

Limite d'une fonction définie par partie.

La limite d'une fonction définie par partie est illustrée à l'aide d'un exemple.

Exemple 2.8

Calculer, si possible, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x < 5 \\ 1 & \text{si } x = 5 \\ 9-x & \text{si } x > 5. \end{cases}$ △

2.2 Indétermination de la forme $\mathbf{\dfrac{0}{0}}$

Certaines situations amènent à évaluer des limites qui prennent une forme particulière. Nous allons traiter le cas de limites qui donnent, à la première vue, un quotient $\frac{0}{0}$.

Par exemple, on remarque que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{0}{0}$. Sous cette apparence, il semble qu'on ne peut pas évaluer la limite. Mais, si on simplifie par $x \neq 0$, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ainsi, en réalité, cette limite vaut zéro.

Donc, en utilisant des opérations algébriques de base, on peut lever l'indétermination. Considérons quelques exemples.

Exemple 2.9

Calculer $\lim\limits_{t\to 5} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{t-5}$. △

Exemple 2.10

Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$. △

Exemple 2.11

Calculer $\lim\limits_{b\to -1} \dfrac{b^3 + b^2 + b + 1}{b^4 + b^3 + b^2 - b - 2}$. △

Exemple 2.12

Calculer $\lim\limits_{y\to -1} \dfrac{y^2 + 2y + 1}{y+1}$. △

2.3 Limite infinie et asymptote verticale

Définition 2.2. *La droite verticale $x = a$ est une **asymptote verticale** de la courbe de la fonction f si au moins une des conditions suivantes est respectée.*

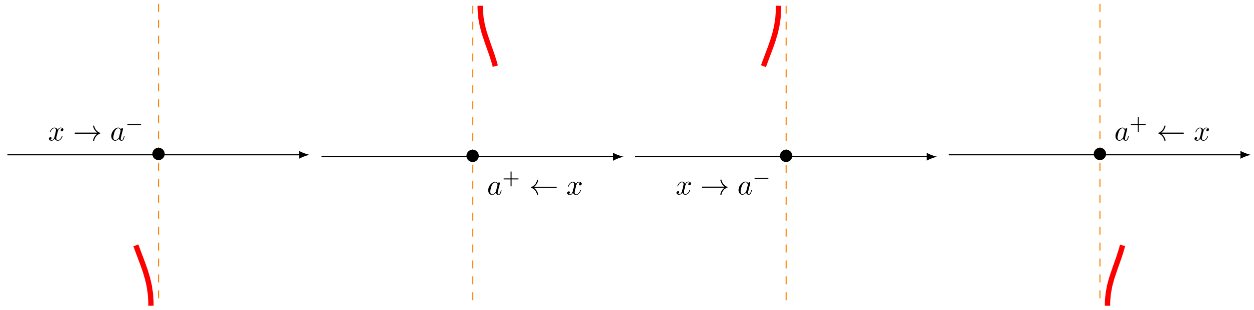
(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

(d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

La figure 1 illustre les différents cas qui peuvent arriver lors du calcul d'une asymptote verticale dont le numérateur et le dénominateur de la limite sont L et $0^{\pm}$.



(a) $L > 0$, $\frac{L}{0^-} = -\infty$ (b) $L > 0$, $\frac{L}{0^+} = +\infty$ (c) $L < 0$, $\frac{L}{0^-} = +\infty$ (d) $L < 0$, $\frac{L}{0^+} = -\infty$

FIGURE 1 – Les différentes asymptotes verticales

Exemple 2.13

Trouver, si possible, l'asymptote verticale de

$$f(x) = \frac{3x-6}{x-2}.$$

$\triangle$

Exemple 2.14

Trouver les asymptotes verticales de

$$f(x) = \frac{2x}{(x+3)^2(x-3)^2}.$$

$\triangle$

2.4 Limite à l'infinie et asymptote horizontale

Définition 2.3. *La droite horizontale d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** de la courbe de la fonction f si au moins une des conditions suivantes est vérifiée.*

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$. *(b)* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Remarque 2.2

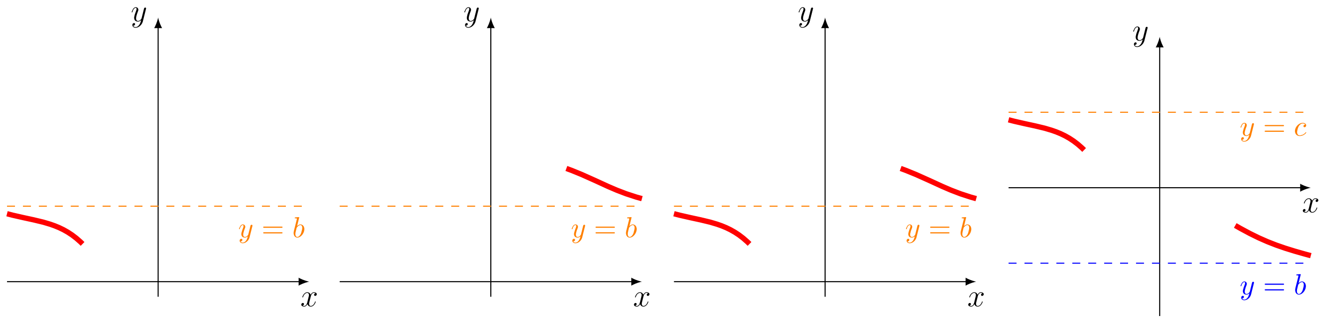
La notation utilisée en-dessous du symbole de limite signifie quelque chose.

- $x \to -\infty$ signifie que x tend vers $-\infty$. Autrement dit, x prend des valeurs de plus en plus grandes dans les négatifs.

- $x \to \infty$ signifie que x tend vers ∞. Autrement dit, x prend des valeurs de plus en plus grandes dans les positifs.

▼

La figure 2 illustre quelques cas d'asymptotes horizontales.



(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

FIGURE 2 – Quelques cas d'asymptotes horizontales

Exemple 2.15

Déterminer les asymptotes horizontales de

$$f(x) = \frac{7}{x}.$$

$\triangle$

Exemple 2.16

Déterminer les asymptotes horizontales de

$$f(x) = 4 + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

$\triangle$

2.5 Indéterminations de la forme $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

La forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ apparait lorsque nous calculons la limite de fonctions rationnelles ou d'un quotient de fonctions algébriques. Afin de lever ces indéterminations, on utilise la stratégie suivante :

(1) Mettre la plus grande puissance de la variable indépendante en évidence au numérateur et au dénominateur.

(2) Simplifier les puissances et évaluer la limite en sachant que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

	Formes de la limite	**Résultat de la limite**
$k \in \mathbb{R}$	$\frac{k}{\pm\infty}$	0
$r > 0$	$(+\infty)^r$	$+\infty$
n pair	$(-\infty)^n$	$+\infty$
n impair	$(-\infty)^n$	$-\infty$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} k\cdot\frac{1}{x^r} = k\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^r} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} k\cdot x^r = k\lim_{x\to\infty} x^r = \begin{cases} k(+\infty) = +\infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}\cdot$$

Exemple 2.17

Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{x^2+7}.$$

△

Exemple 2.18

Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+7}.$$

△

Exemple 2.19

Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4}}{1-2x}.$$

△

Exemple 2.20

Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+4}}{1-2x}.$$

△

2.6 Exercices

Les exercices se retrouvent au chapitre 2 du livre de référence du cours. Les réponses sont fournies à la page 427 du livre (pour les exercices des sections seulement). Je vous conseille de garder les exercices récapitulatifs pour votre révision de l'examen intra ou final.

Lectures recommandées : Section 2.1 page 70 ; Section 2.2 page 82 ; Section 2.3 pages 85-86, 92-93.

Section 2.1 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11.

Section 2.2 : 1 ; 2 ; 4.

Section 2.3 : 1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 7 a), b), d), e) ; 8 ; 9.

Exercices récapitulatifs : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 9 sauf i) à l) ; 10 ; 11 ; 21.