MPU1051 : Calcul différentiel

Cours 1

Notes de cours

Table des matières

1.1 Notations 1

1.2 Opérations de base 4

1.3 Fonctions algébriques 6

1.4 Factorisation et simplification 10

1.5 Résolution d'équations et d'inéquations 12

1.6 Exercices 14

1.1 Notations

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Les éléments sont entourés d'accolades :

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad \text{ou} \quad \{\text{Andrée}, \text{Yves}, \text{Charlotte}, \text{Charlot}\}\,.$$

Le plus souvent, on les identifie par des lettres majuscules comme A. Les éléments sont notés par des lettres minuscules comme a.

Un élément a **appartient** à l'ensemble A s'il se trouve parmi les éléments. On note ceci par $x \in A$. Sinon, il n'appartient pas à l'ensemble et on note ceci par $x \notin A$. L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun élément.

Trois opérations sont définies sur les ensembles.

Définition 1.1. *Soit A et B deux ensembles.*

*(a) L'**union** de A et B est le nouvel ensemble $A \cup B$ définit par*

$$A \cup B := \{x \,:\, x \in A \text{ ou } x \in B\}\,.$$

*(b) L'**intersection** de A et B est le nouvel ensemble $A \cap B$ définit par*

$$A \cap B := \{x \,:\, x \in A \text{ et } x \in B\}\,.$$

*(c) La **différence** de A et B est le nouvel ensemble $A \backslash B$ (ou $A - B$) définit par*

$$A \backslash B := \{x \,:\, x \in A \text{ et } x \notin B\}\,.$$

Le « : » signifie « tel que ».

On pose $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B := \{2, 3, 6, 7\}$.

Exemple 1.1

Effectuer $A \cup B$. △

Exemple 1.2

Effectuer $A \cap B$. △

Exemple 1.3

Effectuer $A \backslash B$ et $B \backslash A$. △

Les différents ensembles de nombres :

(1) Les **nombres naturels** : $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(2) Les **nombres positifs** : $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

(3) Les **nombres entiers** : $\mathbb{Z} := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(4) Les **nombres rationnels** : $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \,:\, a \text{ et } b \in \mathbb{Z} \text{ et } b \neq 0\right\}$.

(5) Les **nombres irrationnels** : $\mathbb{Q}'$.

(6) Les **nombres réels** : $\mathbb{R}$.

Un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ s'exprime à l'aide d'un quotient de deux entiers :

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} = 0,33333333 \text{ ou } 0,\overline{3}.$$

Un nombre irrationnel $i \in \mathbb{Q}'$ ne peut pas s'exprimer à l'aide d'un quotient de deux entiers :

$$\sqrt{2} \quad , \quad \pi \quad \text{et} \quad \sqrt{3}.$$

Les relations d'ordre. On peut ordonner les nombres réels avec la relation « plus petit que ».

Proposition 1.1 (Ordre totale). *La relation d'ordre « $<$ » est la relation « plus petit que » et elle a les propriétés suivantes :*

(a) Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x + y > 0$ et $x \cdot y > 0$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ ou $x = 0$ ou $x < 0$ (ordre totale) ;

(c) Si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$ (transitivité) ;

(d) Si $x < y$ et $z \in \mathbb{R}$, alors $x + z < y + z$ (préservation de l'ordre) ;

(e) Si $x < y$ et $z > 0$. alors $xz < yz$.

(f) Si $x < y$ et $z < 0$, alors $xz > yz$ (inversion de l'ordre).

On peut définir la relation d'ordre partielle « $\leq$ » qui est la relation « plus petit ou égal ». Cette relation vérifie les propriétés (a) à (e) sauf la propriété (b).

Exemple 1.4

$2 > 3$ ou $2 < 3$? $\triangle$

Exemple 1.5

$-2 > -3$ ou $-2 < -3$? $\triangle$

Exemple 1.6

Si $x = 5$ et $4 < 5$, alors $4 + x < 5 + x$ ou $4 + x > 5 + x$? $\triangle$

Exemple 1.7

Si $x = -2$ et $10 \leq 15$, alors $10x \leq 15x$ ou $10x \geq 15x$? $\triangle$

Les différents types d'intervalles :

(1) Intervalle fermé : $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x \leq b\}$.

(2) Intervalle ouvert :

  (i) $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x < b\}$;

  (ii) $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \, : \, -\infty < x < b\}$;

  (iii) $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x < \infty\}$.

(3) Intervalle semi-ouvert :

  (i) $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x < b\}$;

  (ii) $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x \leq b\}$;

  (iii) $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \, : \, -\infty < x \leq b\}$;

  (iv) $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \, : \, a \leq x < \infty\}$.

1.2 Opérations de base

Les exposants. La multiplication d'un nombre réel a par lui-même un certain nombre de fois est représenté par

$$\underbrace{(a)(a)\cdots(a)(a)}_{n \text{ fois}} = a^n \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le nombre réel a est appelé la **base** et n est l'**exposant** de a.

Racines n-ième. Parfois, on doit rechercher la **racine** d'un nombre réel a.

Définition 1.2. *Un nombre réel r est une **racine n-ième** du nombre réel a si $r^n = a$ où $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.*

Si n est un nombre pair ($n = 2$, 4, 6, etc.) :

- si a est positif, alors le nombre a a deux racine réelles, l'une positive et l'autre négative ;
- **si a est négatif, a n'a aucune racine n-ième réelle.**

Si n est un nombre impaire ($n = 3$, 5, 7, etc.), alors a a **une seule** racine n-ième qui est du même signe que a.

La racine n-ième d'un nombre est notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$. Ici, l'exposant est maintenant fractionnaire.

Exposants fractionnaires. On réunit les deux derniers types d'exposants afin de former les exposants fractionnaires d'un nombre réel a :

$$(a^{m/n}) = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Voici quelques propriétés sur les exposants fractionnaires. Afin d'être le plus général possible, on demande à ce que s et t soient des nombres rationnels (exposants fractionnaires).

Proposition 1.2. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $s, t \in \mathbb{Q}$. Alors*

(a) $0^s = 0$ *;*

(b) $a^0 = 1$ *;*

(c) $a^s a^t = a^{s+t}$ *;*

(d) $\dfrac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$ *si* $a \neq 0$ *;*

(e) $\dfrac{1}{a^s} = a^{-s}$ *si* $a \neq 0$ *;*

(f) $(a^s)^t = a^{st}$ *;*

(g) $(ab)^s = a^s b^t$ *;*

(h) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^s = \dfrac{a^s}{b^t}$ *si* $b \neq 0$.

Exemple 1.8

Soit x et y des nombres réels. Calculer, à l'aide de la proposition 1.2, les expressions suivantes.

1) $\sqrt[4]{-16}$;

2) $\sqrt[3]{-27}$;

3) $x^7 x^3$;

4) $\dfrac{y^9}{y^4}$;

5) $\dfrac{\pi^{4/3}}{\pi^{1/3}}$;

6) $(2^4)^9$;

7) $(xy)^{10}$;

8) $\left(\dfrac{(1+x)}{y^8}\right)^4$.

△

Les fractions.

Définition 1.3 (de fraction). *Une fraction est un quotient de deux entités (nombres, expressions algébriques, etc.)* P *et* Q*, c'est-à-dire une fraction est de la forme suivante* $\dfrac{P}{Q}$.

On soustrait et additionne deux fractions de la manière suivante.

Définition 1.4. *Soit* $\dfrac{P}{Q}$ *et* $\dfrac{R}{S}$ *deux fractions de deux entités .*

(a) L'addition : $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S} = \dfrac{PS + QR}{QS}$.

(b) La soustraction : $\dfrac{P}{Q} - \dfrac{R}{S} = \dfrac{PS - QR}{QS}$.

On multiplie et divise deux fractions de la manière suivante.

Définition 1.5. *Soit* $\dfrac{P}{Q}$ *et* $\dfrac{R}{S}$ *deux fractions de deux entités avec* Q, R *et* S *différents de 0.*

(a) La multiplication : $\dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{QS}$.

(b) La division : $\dfrac{P}{Q} \div \dfrac{R}{S} = \dfrac{PS}{QR}$ *ou*

$$\frac{\left(\dfrac{P}{Q}\right)}{\left(\dfrac{R}{S}\right)} = \frac{PS}{QR}.$$

Exemple 1.9

Soit x, y, z, n, u des nombres réels.

(a) Additionner $\dfrac{x}{y}, \dfrac{x^2}{z}$.

(b) Soustraire $\dfrac{x}{z^2}, \dfrac{x^2}{\sqrt{z}}$.

(c) Multiplier $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{u^4}, \dfrac{n^2}{z^{1/3}}$.

(d) Diviser $\dfrac{u^3}{x}, \dfrac{z^{2/3}}{x^{6/7}}$.

△

1.3 Fonctions algébriques

Définition 1.6 (d'une fonction). *Une fonction réelle* f *est une relation qui associe à chaque* $x \in \mathbb{R}$*, au plus un* $y \in \mathbb{R}$*.*

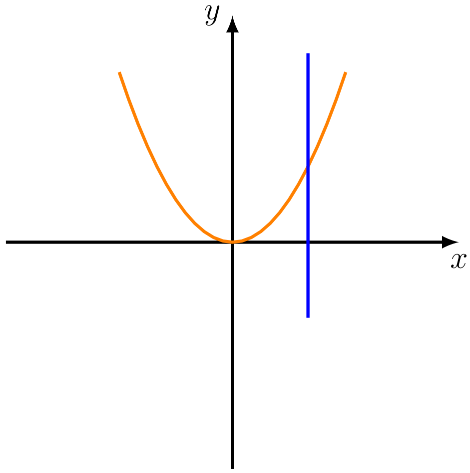
Remarque 1.1 (Notations)

f est le **nom** de la fonction. x est la variable **indépendante**. y est la variable dépendante : c'est l'**image** de x par la fonction f. Une relation entre x et y est de la forme $y = f(x)$.

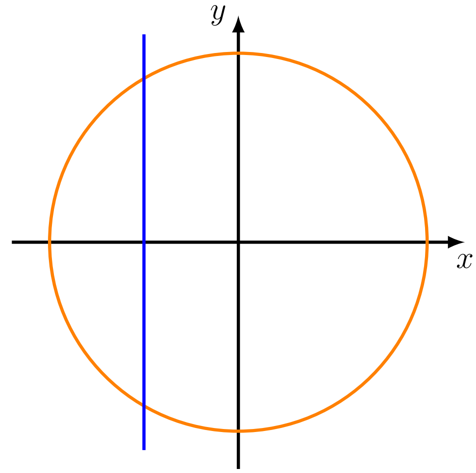
Le **domaine** d'une fonction réelle est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ auxquels la fonction associe une image. On le désigne par $\operatorname{Dom} f$. L'**image** d'une fonction réelle est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui sont l'image par la fonction d'un élément du domaine. On le désigne par $\operatorname{Ima} f$. ▼

Graphique cartésien : Le graphique cartésien d'une fonction est la représentation de la courbe de la fonction. On trace un axe pour les valeurs de la variable dépendante et un axe pour les valeurs de la variable indépendante. Ensuite, on construit un tableau de valeur de $y = f(x)$ en fonction de x.

Test de la droite verticale : Un graphique cartésien est le graphique d'une fonction si toute droite verticale ne le rencontre jamais en plus d'un point.



(a) Une fonction, ici $f(x) = x^2$



(b) Pas une fonction

Définition 1.7. *Les **zéros** d'une fonction définie par $y = f(x)$ sont les valeurs de x tels que $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Dom}\, f$.*

Définition 1.8 (de la composition de fonctions). *Soit f et g deux fonctions telles que $\mathrm{Ima}\, f \subseteq \mathrm{Dom}\, g$. La fonction composée $g \circ f$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$.*

Définition 1.9 (de polynômes). *Une fonction polynomiale de degré n, où $n \in \mathbb{N}$, est une fonction exprimée sous la forme*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ où } a_n \neq 0$$

et a_1, a_2, …, a_{n-1} sont des nombres réels fixés, appelés « coefficients ».

Remarque 1.2

Le domaine de la fonction polynomiale est $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Ima}\, f = \mathbb{R}$ si $n \neq 0$.

Pour additionner deux polynômes, il suffit d'additionner chaque coefficient de même puissance.

Pour multiplier deux polynômes, on applique les règles de distributivité habituelles (voir la prochaine section). ▼

Voici quelques exemples de fonctions polynomiales

Exemple 1.10

$f(x) = -4\pi x^2 + 5x - 2.$ △

Exemple 1.11

$g(x) = x^{100} - x^{50} + 1.$ △

Exemple 1.12

$h(x) = 7\pi.$ △

De la définition de fonctions polynomiales, on tire trois fonctions importantes.

Définition 1.10. *Soit k un nombre réel et a, b, c des nombres réels.*

1. *La **fonction constante** est la fonction qui assigne une même valeur à tous nombres réels x, c'est-à-dire $f(x) = k$ (ou $y = k$).*
2. *La **fonction affine** (appelée aussi droite) est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$) où $a \neq 0$.*
3. *La **fonction quadratique** (appelée aussi parabole) est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ou $y = ax^2 + bx + c$) avec $a \neq 0$*

Remarque 1.3

Le nombre a dans l'expression de la fonction affine est la **pente** et le nombre b est l'**ordonnée à l'origine**. Si on a deux points appartement à la droite, disons (x_1, y_1) et (x_2, y_2), alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

et pour trouver b, il suffit de poser $y_1 = ax_1 + b$ et de résoudre l'équation afin pour trouver la valeur de b (voir la dernière section). Aussi, $y = k$ est appelée une **droite horizontale** et $x = k$ est appelée une **droite verticale** (ceci n'est pas une fonction).

Deux droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont dites **orthogonales** si $a \cdot a' = -1$.

La parabole est ouverte vers le haut si $a > 0$ et vers le vas si $a < 0$. Les zéros réels x_1 et x_2 de la parabole, si $b^2 - 4ac \geq 0$, sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La parabole a comme axe de symétrie la droite vertical D d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$. Les coordonnées du sommet S de la parabole sont (h, l) où $h = \dfrac{-b}{2a}$ et $l = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$. ▼

Exemple 1.13

Soit la parabole $f(x) = 12x^2 - 36x + 7$.

(a) Déterminer l'allure de la parabole.

(b) Déterminer les zéros.

(c) Déterminer son axes de symétrie.

(d) Déterminer son sommet S.

$\triangle$

Définition 1.11 (de fonctions rationnelles). *Une fonction rationnelle est une fonction de la forme suivante*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes et $Q(x) \neq 0$.

Remarque 1.4

Le domaine d'une fonction rationnelle est $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$. $\blacktriangledown$

Exemple 1.14

Déterminer le domaine et l'image de la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 + 2x - 35}$. $\triangle$

Définition 1.12 (de la fonction algébrique). *Une **fonction algébrique** est une fonction définie en termes de polynômes et de polynômes élevés à des puissances réelles.*

Remarque 1.5

Lorsque l'on cherche le domaine d'une fonction algébrique, il faut appliquer le principe suivant :

- on ne peut pas diviser par 0 ;
- on ne peut pas extraire une racine paire d'un nombre négatif.

$\blacktriangledown$

Exemple 1.15

Déterminer le domaine et l'image de la fonction $f(x) = \sqrt{7 - x}$. $\triangle$

Exemple 1.16

Déterminer le domaine et l'image de la fonction composée $f \circ g$ si $g(x) = 7 - x$ et $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$. $\triangle$

Définition 1.13 (de fonction par parties). *Une* ***fonctions définie par parties*** *est une fonction dont la règle de correspondance diffère selon les valeurs de la variable indépendante.*

Exemple 1.17

On définit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ (x-4)^2 + \frac{1}{4} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

$\triangle$

Une fonction particulière définie par partie est la **fonction valeur absolue** notée $|\cdot|$ et définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Si $f(x)$ est une fonction, on peut la composer avec la fonction valeur absolue de la façons suivante :

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

1.4 Factorisation et simplification

Définition 1.14 (de la mise en évidence). *Soit x, y, a et b des nombres réels. Il y a deux types de mise en évidence.*

(a) Simple : $ax + ay = a(x + y)$.

(b) Double : $ax + by + ay + bx = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$.

Définition 1.15 (Conjugué et rationalisation). *Le conjugué et la rationalisation d'une fraction se définissent comme suit.*

(a) Le conjugué de l'entité $A + B$ est $A - B$ et $-A + B$.

(b) Rationaliser une fraction signifie de retirer la racine au dénominateur.

Remarque 1.6

On a toujours que $(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = A - B$ et $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. ▼

Proposition 1.3. *Voici quelques relations utiles.*

(a) Différence de carrés : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

(b) Différence de cubes : $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$.

(c) Addition de cubes : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$.

La **simplification d'expressions algébriques** consiste à effectuer certaines opérations (addition, multiplication, conjugué, factorisation, etc.) au numérateur et au dénominateur afin de réduire l'expression à sa forme la plus simple. Il faut savoir qu'on ne doit pas diviser par 0.

Exemple 1.18

Simplifier l'expression $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 8x + 7}$ △

Exemple 1.19

Simplifier l'expression $\dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$. △

Division de polynômes. La division d'un polynôme par un autre polynôme est possible. Cette opération est semblable à la division en crochet que nous apprenons à la petite école. Par exemple, divisons $3x^2 + 8x - 5$ par $x - 2$:

$$\begin{array}{rr|l} & 3x^2 + 8x - 5 & x - 2 \\ \cline{3-3} - & (3x^2 - 6x) & 3x + 14 \\ \cline{2-2} & 14x - 5 & \\ - & (14x - 28) & \\ \cline{2-2} & 23 & \end{array}$$

La réponse est donc

$$\frac{3x^2 + 8x - 5}{x - 2} = 3x + 14 + \frac{23}{x - 2}.$$

Le terme 23 est le **reste** notée $r(x)$ et le terme $3x + 14$ est le **quotient** $q(x)$. Ainsi, le résultat de la division de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est toujours de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Voici un autre exemple afin de vous pratiquer.

Exemple 1.20

Diviser le polynôme suivant $x^5 + x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 7$ par le polynôme $x - 2$. △

1.5 Résolution d'équations et d'inéquations

Les équations. Résoudre une équation consiste à déterminer la valeur de la variable inconnue dans une égalité. Par exemple,

$$5x + 3 = 4, \qquad x^2 + 2x = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{x+2} + \frac{4}{x+6} = 1.$$

L'idée est de mettre tous les termes du même côté afin d'avoir une équation de la forme $f(x) = 0$. Par exemple

$$5x + 3 - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Donc, ceci revient à déterminer les zéros d'une certaine fonction.

Il se peut que l'expression, une fois mise d'un même côté et posée égale à 0, soit un produit de plusieurs facteurs. On a la règle suivante pour traiter ce genre de situation.

Proposition 1.4. *Soit A_1, A_2, …, A_n, n entités (expressions algébriques, polynômes, etc.). Si $A_1 A_2 \dots A_n = 0$, alors*

$$A_1 = 0 \quad \textit{ou} \quad A_2 = 0 \quad \textit{ou} \quad \dots \quad \textit{ou} \quad A_n = 0.$$

Exemple 1.21

Résoudre $6x + 11 = -1$. △

Exemple 1.22

Résoudre $x^2 + 2x = -1$. △

Exemple 1.23

Résoudre $(3x-4)(5-2x)(2x+1)=0$. △

Exemple 1.24

Résoudre $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x+6}=1$. △

Les inéquations. Une inéquation est une expression dans laquelle on retrouve une variable et un signe $\geq$, $\leq$, $<$ ou $>$. Une solution d'une inéquations correspond à toutes les valeurs qui satisfont l'inéquation.

L'ensemble de toutes les valeurs qui vérifient l'inéquation est appelé l'**ensemble-solutions**, noté E.S..

Le truc pour résoudre une inéquation est de ramené celle-ci sous la forme $f(x)$ "symbole" 0. Ensuite, on analyse, à l'aide de différentes valeurs de la variables indépendante, le signe de l'expression (positif « + » ou négatif « − »).

Exemple 1.25

À l'aide d'un tableau, déterminer E.S. de l'inéquation suivante

$$\frac{x^2-3x}{-6x^2+13x+5}\leq 0.$$

△

Équations contenant des racines. Une équation dans laquelle il y a une racine carrée peut-être résolue en portant au carré l'expression et en prenant le soin de mettre l'expression comportant la racine carrée d'un côté de l'équation et le reste de l'autre côté.

Lorsque nous obtenons une solution, il faut toujours vérifier si celle-ci satisfait l'équation ou appartient au domaine de l'équation.

Exemple 1.26

Déterminer la valeurs de x telle que

$$\sqrt{2x+15}+5=2x$$

où $x\in[-7,5,+\infty[$. △

Exemple 1.27

Déterminer la valeurs de x telle que

$$\sqrt{16-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}.$$

△

1.6 Exercices

Les exercices se retrouvent au chapitre 1 du livre de référence du cours. Ces exercices débutent à partir de la page 7. Je vous conseille de faire tous les exercices afin d'être à l'aise avec les opérations de base. Ces opérations de base sont essentielles pour la bonne continuation du cours et sa réussite. Mettez-y du cœur !

Lectures recommandés : Sections 1.1 à 1.7

Section 1.2 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7.

Section 1.3 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Section 1.4 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10.

Section 1.5 : 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Section 1.6 : 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Section 1.7 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 15.